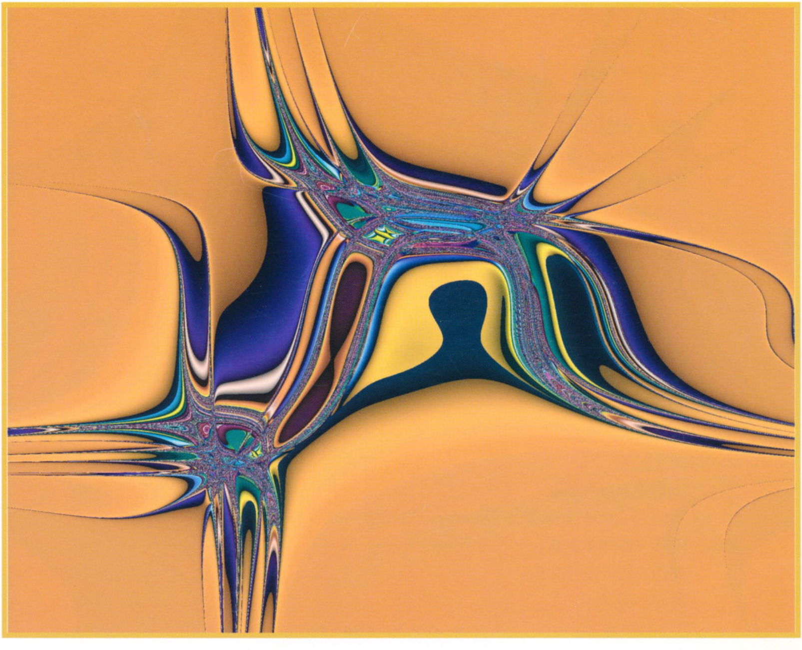
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2001年1月1日発行　第39巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

# 数理科学

1
2001

特集
# 時間とは何か
## 時間が生んだ世界観とパラダイム





No.451

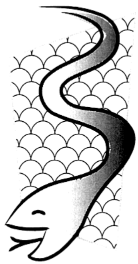
サイエンス社

数理的マーケティングのためのエクセル100％活用法　**最新刊**

# すぐわかるEXCELによるマーケティング統計

●山中正彦・田中英之著 ―――― A5判／定価2625円

販売業務に携わるすべての人の実用に役立つ、エクセルを使った統計入門。陥りやすい落とし穴を実際のデータで解説。データ処理と表現方法も学びながら営業分析業務の効率化もはかれる。実績データの統計処理、トータルマーケットの推移予測、マーケットの構造と販売戦略、収益力分析による資源の捻出、売り上げデータのカテゴリー分析、販売促進効果分析など、内容も盛りだくさん。



# 研究者

成功する研究者になる方法

●有馬朗人監修 ―――― 四六判上製／1890円



ヒトゲノム解析の榊佳之、高温超伝導の北澤宏一、ニュートリノの戸塚洋二、脳型コンピュータの松本元、電子線ホログラフィーの外村彰、フィールズ賞受賞者の森重文など、科学の最前線で活躍する著名な研究者たちが、研究者をめざす学生・院生や若い研究者に、第一線の研究者として成功するための貴重な助言を贈る。

大学院ガイドの決定版！！　**1月20日発売**

## 2001年度版理学工学系大学院案内

●有馬朗人監修 ―――― A5判

全国の理学工学系大学院175大学261研究科の情報を満載した大学院ガイドブック。2001年度版には巻頭企画として、東北大学総長インタビュー、東京大学大学院工学系研究科電子情報工学専攻の研究室訪問のほか、合格体験記など役立つ情報を盛り込んだ。

合格体験記と研究室訪問

## 理工系のための大学院の歩き方 第3版

●東京図書編集部編 ―――― A5判／2100円

大学院へすすむには、いつ頃からどんな準備をすればよいのだろうか。社会人にもチャンスはあるのだろうか。大学院進学のためのノウハウや対策を、Q&A形式でやさしく教えてくれるガイドブック。

## 売れる書籍をじっくり作りたい方 募集！！



現在、東京図書では理数系編集部員を募集しています
私たちと一緒に力を合わせていい本を作りましょう

**担当：総務課　大日方（オオヒカタ）**
**電話：03-3816-2564**

（定価税込）

〒112-0005　東京都文京区水道2-5-22　**東京図書**　振替口座=00140-4-13803
TEL 03(3814)7818 FAX 03(3815)7330

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 451 January 2001

# 時間とは何か

## 時間が生んだ世界観とパラダイム







表紙：戸川　隼人

## お得な定期購読をおすすめします

**毎号確実に御手元へ**

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．**

**予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌十別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌十別冊 1 冊）7,250 円です．**（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

**お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．**

### 数理科学特集一覧

63 年/7～97 年/12 省略
1998 年/1 ニューロサイエンス最前線
/2 場の量子論
/3 数値解析：新手法の開発と進展
/4 自然がうみだす多様な散逸構造
別冊 素粒子
/5 現代物理学への道のり
/6 特異点
/7 代数幾何の様々な顔
/8 重力の魅力
/9 モデルとモデリング
/10 量子コンピュータ
別冊 現代の数理物理
/11 数式処理とその周辺
/12 類体論の 100 年
1999 年/1 多彩な光
/2 素粒子物理の新展開
/3 跡公式
/4 現代物理学の展望と未来
別冊 場の理論
/5 今日の応用数理
/6 ゲノム解析
/7 計算幾何の拡がり
/8 ハミルトン力学系の展開
/9 超離散
/10 複雑系科学の形成
別冊 重力理論
/11 無限と連続
/12 知識情報処理の統計力学的アプローチ
2000 年/1 保型関数
/2 双対性（デュアリティ）
/3 生命現象の基本原理
/4 量子論と相対論
別冊 量子カオスの物理と数理
/5 力〈ちから〉
/6 最新 脳のモデルと数理
/7 分子コンピューティング
/8 非線形科学と微分方程式
/9 暗号の数理
/10 脳と心の量子論
別冊 数論の歩み
/11 数理物理における代数解析的方法
/12 20世紀科学革命の基礎

**数理科学臨時別冊一覧**

99 年/1 量子力学とは何か
99 年/9 カオス研究の最前線
99 年/11 シュレーディンガー方程式
99 年/12 量子コンピュータの基礎
00 年/1 有限体と符号理論
00 年/2 アルゴリズムの道具箱
00 年/3 デリバティブの数理
00 年/5 複雑系経済学とその周辺
00 年/9 現代暗号とマジックプロトコル
00 年/11 差分方程式講義

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
弘栄堂書店（吉祥寺）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
大盛堂（渋谷）
芳林堂（池袋）
リブロ池袋店（池袋）
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
旭屋池袋店
関戸書店（田無）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
友朋堂（つくば）
三省堂名古屋店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂サンパル店（神戸）
ジュンク堂書店（姫路）
ジュンク堂書店（大分）
宮脇書店岡山本店
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店広島店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿・野田
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学・千葉大学
名古屋大学 北部厚生会館
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂

January 2001 MATHEMATICAL SCIENCES Number 451

特集／時間とは何か

# 時間とは

## ラプラスのデモン・マクスウェルのデモン

戸田 盛和

### 1. 時間という概念（定義されないものからの出発）

科学の用語はできるだけ正確に定義されているのが望ましい．しかし，もしも多分に不正確な日常的な言葉や概念の使用を全く禁じてしまったりすると科学は最初の一歩を踏み出すこともできないにちがいない．これは『空間・時間・物質』のそれぞれについてもあてはまる．「時間」は物理学にとって最も基本的なものであるが，これは我々がもって生まれてくる判断の枠組みであるとさえ思える．このような先験的な時間の概念があるのかどうかわからない．我々は主観的な時間感覚をもっていると同時に，時計で与えられる客観的な時間の概念をもっている．

ここでは問題を科学，あるいは物理学に限定することにするが，このとき時間のもつ人間的で面白い面が切りすてられてしまうことを忘れてはならない．科学といえども人間のいとなみであるからには，物理学が切りすてた領域に科学のある分野が戻ってくることがあることも期待される．

さて，実際に科学でなされてきたことを見ると，科学は決して厳密な定義などから出発してはいない．一般に科学は，不正確かもしれないがよさそうな言葉，あるいは概念を仮定して出発し，行けるところまで行く．そしてその結果が観測・測定などと合わなくなったりしたら，別のもっとよさそうな概念に変える，という風に進んできた．概念の選び方が大きい成功を収めるときは一つの世界観とかパラダイムとかが続くわけである．科学はこの過程により，いわばスパイラル状に進化してきた．

時間の概念の進化をたどってみよう．原始の時代においては，夜空の星の運動や地球上の四季の変化が時間の経過として認められた．これから時間は循環的，周期的なものとする考えや輪廻という思想が生まれた．また他方では神による世界の創造と終末があるとする思想も生まれた．しかしこれらの考えには科学的な裏づけも発展もなかった．第三の考え方として，直線的に無限の過去から無限の未来へと貫く時間という概念があり，これはニュートン的な時間にほかならない（図 1 参照）．

ニュートン的な時間以来，科学的なあるいは物理的な時間の概念は何度も書きかえられてきた．大まかに見ても次のような図式が考えられる．

ニュートン的時空 ⟶
- → 相対論的・宇宙論的時間
- → 熱力学的時間
- → 地球的時間・進化論的時間
- → 個々の生物の時間

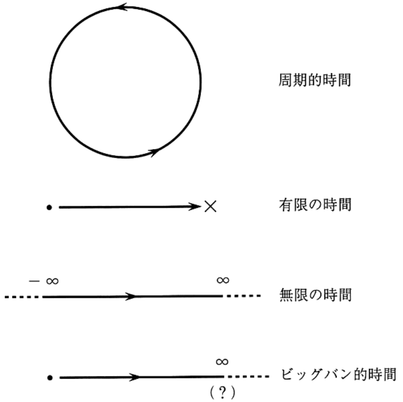



図 1　いろいろな時間.

## 2. ニュートン的時間 (過去と未来の区別がない時間)

コペルニクス，ケプラーを経てニュートンにいたる時代に太陽系の力学が確立された．これは同時に太陽系が存在する空間とその中の運動を記述する時間が明確に認識されたことを意味する．これを少し拡げて，ニュートンは無限に広がる一様な**絶対空間**と，過去から未来へ一様に経過する**絶対時間**を仮定した．空間と時間はあわせて 4 次元の時空を形成することになる．ニュートンの時代には銀河系やその外に関しての知識はほとんどなかったが，とにかく太陽系では一様な絶対時空という概念が圧倒的に有効であることが示されたのである（またニュートンは回転する水桶の水面が中央で低下する事実を踏まえて，この空間が回転していないことの証明を与えている）．

［ニュートン力学の決定論］

物体 (の集まり) の運動はニュートンの運動方程式にしたがう．そして任意の時刻における物体の位置と速度が与えられれば，次の時刻における物体の位置と速度はニュートンの運動方程式によって一義的に決定される．すなわち運動は**決定論的**である．これは摩擦などのない天体では厳密に成り立つ．摩擦などは物質を構成する微細な原子の運動によって生じるもので，その運動まで力学的に考察することにすれば，すべての運動は決定論的である．この意味でニュートン力学は決定論的である．

［ラプラスのデモン］

ニュートン力学のパラダイムを発展させたラプラスは，ニュートン力学の決定論を強調して，次のように述べた．

『宇宙の現在の状態は，先立つ状態の結果であり，あとに続く状態の原因であると見なさなければならない．自然を駆りたてるすべての力と，自然を構成する存在の個々の状況を，与えられた時間において正確に知ることができ，運動方程式を瞬時に積分して次の瞬間の状況を瞬時に知ることができる知性があったとすれば，この知性にとっては過去も未来も同等に明白であろう….』

このように無限にすばやく正確な測定能力と計算能力をもつ生物をラプラスのデモン（魔物）という．このデモンにとっては過去と未来は同等である．彼にとっては，すべての人の運命は決定されていて，自由意志もあり得ないことになるだろう．これは容認しがたいことであり，ニュートンの運動方程式の正しさも信じられなくなる．

しかしこの話にはいくつかの誤認がある．実際，測定の精度には限度があり，また測定は対象に対して必ず影響を与える．極めて近い未来を予想しようとするときは，少数個の測定だけで十分かもしれないが，そのような場合でも限りない精度で測定をおこなうことはできない．できないことを想像するのは科学の領域内のことではないわけである．したがって，ラプラスのデモンは『想像上の詩の領域に属するものであり，実験科学に属するものではない』(ブリルアン：科学と情報理論（佐藤洋訳)，みすず書房，1969)．

［ニュートン的時間の可逆性］

ニュートンの運動方程式には，もともと過去と未来の区別が存在しない．いいかえれば時間 $t$ の符号を変える変換

$t \to -t$

に対して，ニュートンの運動方程式は不変である．過去と区別される未来は，ニュートン力学に対して何らかの付加的なものを加えたときにはじめて成立するわけである．この付加的なものには測定の影響があり，さらに測定の限界と運動のカオス性とのからみ合いがある．

## 3. カオスと時間
（運動のカオス性と予測の不可能性）

太陽のまわりの惑星の運動を理解するために，ニュートンはいくつかの設定をした．それは

(1) 一様に広がった空間と一様に流れる時間
(2) 運動方程式
(3) 万有引力

の三つであった．(1) はニュートン的時空モデルといってよいのであろう．これは惑星などの運動を記述するのに大成功をおさめたが，現実にある時間の不可逆性とは真向から矛盾するように見える．これはある面を理想化したことによって大成功をおさめた基礎的な概念（あるいはモデル）が，別な面で現実と大きく矛盾する一つの顕著な例である（別の例：理想気体は大変有効なモデルであるが，無限に小さい分子を設定すれば熱平衡の状態にはなり得ないことになる）．しかしこの問題はここでは深入りしないことにしたい．(3) の万有引力の仮説はしばらくおいて (2) の運動方程式について述べよう．

力学の本などには運動方程式が解ける場合，すなわち解析的な解が求められる例だけが示されているため，運動方程式を書くことができれば問題は原理的には解決されたも同然であるという誤解があるらしい．

解析的な解が得られないときも，まず初期条件を仮定して運動の発展を数値的に求める方法はあるが，そのようにして求められた運動の様子（軌道）は初期条件がわずかの差によって大きく変わってしまうのが一般である．そのため運動を論じるには，運動方程式だけでなく，運動の著しい**初期条件敏感性**（カオス）を考えなければならない．

ニュートンが扱ったのは，惑星間の相互作用が無視できる精度における太陽のまわりの惑星の運動であった．これはケプラー運動といわれているもので，楕円軌道上の周期運動であり，初期条件はたいした意味をもたない．この場合は，はじめに極く近い初期条件から出発した二つの運動は長い時間を経ても近いところにある．しかしマクスウェルはすでに次のような注意を述べている．

『鉄道のポイントを少し動かしただけで，列車が全く別の方向へ走ってしまうことがあるように，初期条件のわずかなちがいが最終状態に非常に大きな変化を与える場合もある．』（マクスウェル：物質と運動，1877）（図 **2** 参照）．

マクスウェルが研究した気体分子の運動では，玉突きの玉のように，極くわずかそれただけで衝突の結果が大きく変わってしまうことは絶えず起こる．彼はそのようなことを意識してこの注意書きを記したのだろう．

惑星の運動でも，第三の天体が加わった三体問題は一般に解くことができない．その運動は大変複雑で，初期条件を極くわずか変えただけで運動は全くちがったものになる．このことを発見した

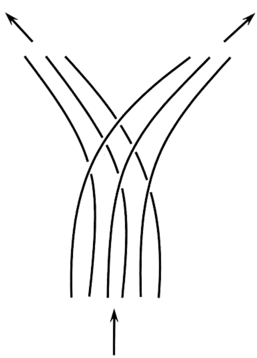


図 2　不確定な軌道．

のはポアンカレであった．彼は**カオス**を見ていたといわれている．ポアンカレは次のように述べている．

『…最初の状態における小さな差違が，最後の現象において非常に大きな差違を生ずることもあり得よう．また最初における小さな誤差が，のちに大きな誤差となって現われるでもあろう．かくて予言は不可能となって，ここに偶然現象が得られるのである．…観察者の感知し得ない微小な原因と，ときとして恐るべき天災ともなる重大な結果との間に，前と同様な対照を見出すのである．』（ポアンカレ：「科学と方法」吉田洋一訳，岩波文庫，1953）．

これはカオスが再発見されたローレンツモデルについていわれる「**バタフライ現象**」そっくりの文章である．「1 羽の蝶が北京で今日はばたいて空気を乱した影響で，何日か後にニューヨークに嵐がやってくるかもしれない」というのがバタフライ現象である．

数学者によれば，実数は有理数と無理数とによって連続的にうめられている．そして無理数は有理数に比べて圧倒的に多いから，任意に 1 つの実数を選べば，それが無理数である確率が圧倒的に大きい．しかしたとえば，ある点から測って $\pi\,\mathrm{cm} = 3.1415\cdots$（無理数）cm の点というのは無意味であるように，物理学者にとっては無限に細い運動の軌道というのは意味がないし，無限に細かくきめられた初期条件も無意味である．

それにもかかわらず理論物理学者あるいは数理物理学者は無限に細い軌道にこだわり，無限に細かい初期条件にこだわる．これは今のところ，ある不確かさをもった物理的初期条件をとりこんだ運動方程式というのがうまく考えられていないからであると思われる．

いずれにしても，次のことがいえるであろう．

(a)　ケプラー運動などのように解析的に解ける運動は例外的なものであって，ニュートンの運動方程式にしたがう運動は一般的にいえば（三体問題のように）カオス的である．そのため，力学の本にふつう書いてあるような特殊な場合を除き，一般に物理的な初期条件はある程度の不確かさをもち，運動の軌道も不確かさをもつことになる．

(b)　いいかえれば，初期条件の物理的な不確かさのためニュートン力学にしたがう運動は決定論的ではない．すなわち，未来が現在あるいは過去によって完全に決定されることはない．

(c)　時間を追って個々の軌道を追跡しようとすればこのような不定さが生じてくる．しかし非常に長い時間をかけてすべての軌道をひっくるめてしまえば，不定さは解消する．これは**平衡状態の統計力学**の立場であり，代償として時間は霧消してしまう．

## 4. 熱力学的時間（不可逆的な時間）

原子の運動に比べれば非常に長いが，日常的尺度に比べれば短い時間内で運動を粗視化したのが熱力学的立場であるといってよいであろう．この立場では平衡状態への近接とか，エントロピーの増加（熱力学の第 2 法則），**時間の不可逆性**などを扱うことができる．

時間的に不可逆な現象のわかりやすい例は熱伝導現象であろう．放置された物体を考え，絶対温度を $T(x, y, z, t)$ とし，熱伝導率を $\kappa$，密度を $\rho$，比熱を $c_v$ とすると

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\ (\kappa\ \mathrm{grad}\ T) \qquad (1)$$

が成り立つ（熱伝導方程式）．

(1) 式からエントロピー $S$ の時間変化を求めると

$$\frac{dS}{dt} = \iiint \frac{\kappa}{T^2} (\mathrm{grad}\, T)^2\, dx\, dy\, dz \qquad (2)$$

となる．したがって，$dS/dt \geqq 0$．これはエントロピー増大の定理の一番簡単な例である．上の 2 式は共に時間の 1 階微分 $\partial/\partial t$ を含み，$t \to -t$ とすれば方程式はちがうものになってしまう．これが時間の不可逆性を表わしている．

放置された体系（孤立系）のエントロピーは減少することがないというのがエントロピー増大の

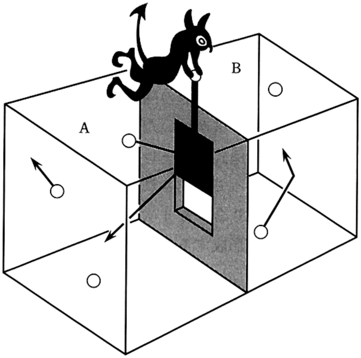



図3　マクスウェルのデモン．

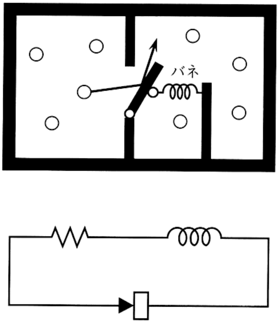



図4　マクスウェルのデモンの変形．

定理であり，**熱力学の第2法則**はこれとほぼ同じ内容のものである．これらは熱現象の時間に対する不可逆性を表わしている．

放置された気体の密度，圧力，温度などが時間のたつにつれて一様になるのは，すべて熱力学の第2法則の現われであり，自然の成り行きである．

ところが，マクスウェルは第2法則をくつがえすことができる生物を発明した．彼はこの発明をいくらか得意になって宣伝したらしい．ケルビンはこの生物に「マクスウェルのデモン」という名をつけた（**図3**参照）．

［マクスウェルのデモン］

『その生物は非常に俊敏な能力をもっていて，各分子の動きを捉えることができる．しかもわれわれには不可能なことをおこなうことができる．…今，次のような想像をしてみよう．一つの容器があり，その容器は，小さな隙間のある仕切りによってA, B二つの部分に仕切られている．そして個々の分子を見分けることのできるこの生物は，この隙間を次の要領で開閉する．比較的速く運動している分子だけをAからBへ行かせ，比較的遅い分子だけをBからAへ行かせる．この生物は，かくして熱力学の第2法則に反して，仕事の損失なしにBの温度を上げ，Aの温度を下げることができる．』（カルツェフ「マクスウェルの生涯」早川光雄・金田一真澄訳，東京図書，1976）．

マクスウェルのデモンはその後，多くの人によって取り上げられ，議論された．これについてはブリルアンの著「科学と情報理論」（前出）にくわしく述べられている．

デモンが開閉する扉を，速い分子だけが押して通れるようなバネつきのドアとか，逆転を防ぐ歯止めをもつ装置でおきかえてみるのも一つの方法である（**図4**参照）．この場合，ドアのバネや歯止めのバネは冷たく保たなければならない．そうしないとバネは気体分子からエネルギーをもらって，遂にはバネも気体分子と同程度のエネルギーで振動するようになるからである．こうしてバネが気体と熱平衡になってしまってはデモンの役目を勤めることができない．バネを冷却するときは，この装置全体は熱機関（第2種の永久機関）になってしまい，熱力学にしたがうことになってしまうわけである．このように開閉扉のブラウン運動を考えてこの問題の解答としたのはスモルスキーであった．

一つの閉じた回路に理想的な整流器を挿入したものも，回路内に生じる（温度による）熱雑音の電流を一方向きにだけ通すことにより，第2法則に反する行いをするように思うかもしれないが，整流器は間もなく開閉扉のバネと同様にブラウン運動をはじめて機能を失ってしまうわけである．

上に述べたマクスウェルのデモンも同様である．デモンが分子を見分けるにはデモンは冷静でなければならないが，たとえばデモンが分子の反射する光を見てその速度を知るとすると，光を受けることによってデモンの眼は次第に熱くなってしまい，判定が不確かになるであろう．そして最終的には気体分子と容器の中の光の場とデモンの眼が熱平衡になってしまい，デモンは機能を失ってしまうことになる．

マクスウェルは温度差を作るデモンを考えたが，圧力差を作るデモンを想像することもできる．この場合には，たとえば右から左に進む分子に対してだけ扉を開け，左から右へ進む分子に対しては扉を閉じることにすればよいわけである．

マクスウェルのデモンは，エントロピーを減少させ，時間を逆転させると期待されたのであるが，それは実在できないものであることがわかった．このデモンのいない現実の世界では，エントロピーは一方的に増大する．そしてエントロピーの増大は本質的には熱伝導や物質の拡散によるものである．さらにそれは不確かさをもった軌道の束が混じりあうカオスによるものと考えられるが，この点はもっと吟味しなければならないと思う．

## 5. 相対論における時間（観測者ごとに異なる時間）

ニュートン以来容認されてきた時空のモデルによると，空間は太陽系に対して絶対的に静止したものであり，時間はこれと独立して一様に流れるものであるとされた．この絶対空間に対して光の速さが $c$ で伝わるならば，この空間に対して $v$ の速さで運動する観測者にとって光は速さを $c-v$ で伝わるように見えることになる．しかしアインシュタインはこの考えに違和感をおぼえ，絶対空間という考えを棄てるにいたった．彼は光の速さこそ絶対的なもので，ある観測者 A にとって光の速さが $c$ であるならば，この観測者に対して一様な速度で運動する別の観測者 B にとっても光の速さは $c$ でなければならないと考えた．そしてこの考えを貫くために，観測者 A の空間・時間の座標 $(x,y,z,t)$ と観測者 B の空間・時間の座標 $(x',y',z',t')$ の間に線形の関係があるとしなければならないことに気がついた．よく知られているように，この関係式は**ローレンツ変換**である．この変換法則によって変換される時空は空間座標と時間座標が混ざり合った 4 次元時空（ミンコフスキーの時空）を形成する．ミンコフスキーは講演において次のように述べている．

『これからは空間そのものとか時間そのものという考えは単なる影の中に消え失せざるをえず，その二つのある種の結合だけが独立した真実性を持ち続けることになるでしょう．』（セグレ「X 線からクォークまで」久保亮五・矢崎裕二訳，みすず書房，1982）．

絶対的な時間，すべての観測者に共通な時間というニュートン的な概念は失われ，その代りに観測者ごとに異なる時間，すなわち相対的な時間と空間がまざったものが本当の実在と考えられるようになったのである．

ニュートンにおける時空は，物理的考察によって導かれたものでなく，むしろ直観的に述べられたものであった．それに対し**特殊相対性理論**における時空は，光速度不変の原理という要請から論理的に導かれたものである．時空も物理学的対象の中に組み込まれたのである．

物理的対象としての時空は，ファラデーが考えた電磁場という概念にも顔を出している．空間は電気力線と磁力線によって張られた実体と考えられたからである．ファラデーの考えを数理的に整えたマクスウェルは電磁場の方程式の中に時間と空間座標ができるだけ対称に現われるように電磁場の方程式を作った．しかしファラデーもマクスウェルもニュートン的絶対時空の概念から完全に自由になることはできなかった．

ローレンツもポアンカレも数式の上ではローレンツ変換をすでに導いていたが，そこに現われる時間座標の意味を物理的に理解することはできなかった．そこにアインシュタインが現われてニュート

ン的呪縛から物理学を解き放ったのである．

さらにアインシュタインは重力と加速度運動との関係（等価原理）を深く考察し，各微小時空ではローレンツ変換が成り立つようないわゆる曲がった時空という概念に到達し，**一般相対性理論**を作り上げた．

一般相対性理論が作られた当時，これは単なる理論的な遊びのようにも思われたが，ハッブルなどが宇宙の膨張を観測で確かめ，フリードマンが膨張する宇宙を含む一般相対性理論の解を見出すなどの発展を経て宇宙論と結びつき圧倒的に大きな成果を与えている．

一般相対性理論によれば，時間の進み方は観測者の速度だけでなく，加速度やその点における重力の強さにも関係する．別々の道を通って宇宙旅行してきた2人の観測者の時計がちがった時間を刻むことになる．物理学的時間は日常の感覚から大きく離れたものになってきた．物理学はどこへいくのだろうと思う人も少なからずいるにちがいない．

## 6. 結語（生物学的時間 e.t.c.）

はじめにたてたプログラムには，地球的時間とか進化論的時間などを挙げておいたが，地球という特殊な天体では時間の経過につれて他の天体に見られない事件が相ついで起こって現在にたどりついている．地球の年齢の46億年は人間の寿命の約 $10^8$ 倍である．

生物は地球上で進化して現在に到達したとされているが，その進化の様子は想像をはるかに超えている．時間も，$10^8$ 倍になると質的にちがったものになり，ちがった概念として考えなければならないと思われる．人間の時間をミクロ的とすれば地球的・進化論的時間はマクロ的で，これらは $10^8$ という数でへだてられている．ミクロな原子の世界では電子波などの概念が通用し，マクロな物体の世界では温度などの概念が通用する．これらの世界の間にあるギャップと同じようなものが，人間的時間と地球的時間の間にもあって，そのために生物の進化の軌跡をたどろうとしても理解し得ないということなのだろうか．生物の進化は物質の進化であり，進化は物質の中にインプットされたものであるともいわれているらしい．いずれにしても進化は物理学にとっても大きななぞであると思う．

（とだ・もりかず）

# 波動関数と時間



原　康夫

## 1. はじめに

この特集号に原子を無視するわけにはいかないだろう．なんといっても，時間の基準には原子時計が使用されている．すべての原子はその原子に固有の振動数で振動しつづけている．だから，原子時計を時間の精密な普遍的基準に使えるのである．これに対して，マクロな物体は個々の物体に固有の振動数で振動するので，時間の普遍的基準には使えない．

現実には，原子の振動や振動数そのものが観測されるのではなく，たがいに遷移しあう2つの状態の振動数の差が，遷移の際に放出・吸収される電磁波の振動数として観測される．精密に測定されるのは，この差である．たとえば，水素原子の1s–2s 遷移に伴う電磁波の振動数は $1.8 \times 10^{-14}$ という精度で測定されている．

波動関数と時間という題の本稿では，まず量子力学の基礎にある古典力学における時間との関連で量子力学での時間の位置づけを議論し，つづいて原子の振動と時間について考え，最後に，素粒子物理学の最先端での関連した話題でしめくくりたい．

## 2. 古典物理学と量子力学

原子の世界に日常生活の経験と密接に結びついた古典物理学は適用できない．原子物理学の本を開くと，「古典物理学によれば，原子の中で，荷電粒子である電子が原子核のまわりで単位時間あたり $\nu$ 回転の回転運動を行なうと，振動数 $\nu$ の電磁波が放射されるはずである．ところで，原子が電磁波を放射すると，放射された電磁波のエネルギー量だけ，原子のエネルギーが減少し，電子の軌道半径は小さくなっていく．そこで，放射される電磁波の振動数は，軌道半径の減少とともに連続的に増加していくはずである．ところが，気体の原子から放射される電磁波の振動数はとびとびの決まった値のものだけである…．」という古典物理学の困難が指摘されている．

その本のもう少し先には，1913年にボーアは次のような仮説を提唱したと書いてある．「原子や分子は，ニュートン力学の場合とは異なり，ある決まったとびとびの値のエネルギー $(E_1, E_2, E_3, \cdots)$ しかもてない．このとびとびのエネルギーの状態を定常状態という．

(1) 原子や分子が1つの定常状態にあるときにはエネルギーは一定で，原子や分子は光を放射せず，

(2) 原子や分子がエネルギーの高い定常状態 $E_n$ から低い定常状態 $E_m$ に遷移するときには，振動数 $\nu = (E_n - E_m)/h$ の光の光子を1個放射し，

(3) 原子や分子がエネルギーの低い定常状態 $E_m$ から高い定常状態 $E_n$ に遷移するときには，振動数 $\nu = (E_n - E_m)/h$ の光の光子を1個

吸収する.」

ボーアが「原子や分子がエネルギー $E_n$ の状態から $E_m$ の状態に移るとき，原子のエネルギーの減少量 $E_n - E_m$ に比例する振動数 $\nu = (E_n - E_m)/h$ の光の光子を 1 個放射する」と提唱した理由は，19 世紀最後の 1900 年にプランクが「振動数 $\nu$ の光はエネルギーが $E = h\nu$ の粒，つまり，光子（フォトン）として，物質から放出され吸収される」ことを，黒体放射の研究を通じて，発見したからである．$h$ はミクロな世界を特徴づけるプランク定数である．

量子力学誕生前の前期量子論時代に提案されたボーアの仮説を紹介したのは，時間を刻む時計としての原子や分子の振る舞いの定性的理解には，いまでも有用だからである．

## 3. 光や電子の二重性

光は回折や干渉など波のもつ性質を示す．つまり，光は空間を伝わるときには波として伝わる．光は電磁場の振動が空間を伝わる電磁波の 1 種である．しかし，光が物質から放出され吸収されるときには，光は決まった大きさのエネルギーをもつ粒子として振る舞う．つまり，光は波動と粒子の二重性を示す．

決まった大きさの質量と電荷をもつという粒子の性質を示す電子も干渉現象などの波動性を示す．エネルギーが $E$ で運動量（= 質量 × 速度）が $\boldsymbol{p}$ の電子の流れ（ビーム）は，振動数 $\nu = E/h$，波長 $\lambda = h/p$ の波として回折したり干渉したりする．つまり，電子は，空間を伝わるときには，波動として伝わる．この波動を表すのが波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ である．

電子が蛍光板に衝突すると，電子は輝点を発生する．つまり，物質と相互作用するときには，電子は粒子として振る舞う．時刻 $t$ に場所 $(x, y, z)$ で電子を発見する確率は，波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ の絶対値の 2 乗 $|\psi(x, y, z, t)|^2$ に比例する．たとえば，電子波が干渉して検出面（蛍光板）上に明暗の縞をつくる場合（**写真 1**，**d** 参照），明るい部分

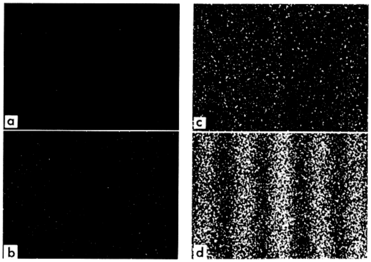



**写真 1**　電子顕微鏡による干渉縞の形成過程（a → b → c → d）（日立製作所基礎研究所・外村彰博士提供）．

はそこに電子が衝突して輝点をつくる可能性の大きい $|\psi(x, y, z, t)|^2$ の大きな場所である．このようにして，電子の粒子性は波動関数によって確率的に記述される．

蛍光板で電子の位置を測定した場合，つまり，蛍光板に輝点が発生した場合（**写真 1** 参照），それまで空間に広がって存在していた波動関数は，検出直後には検出した場所だけに局在することになる．これを波動関数の収縮という．

波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ の従う方程式が，1926 年にシュレーディンガーが発見した，シュレーディンガー方程式である．$+x$ 方向に進む波長が $\lambda$ で振動数が $\nu$ の波を表す関数は

$$\psi(x, t) = \mathrm{A}\cos[(2\pi x/\lambda) - (2\pi\nu t)] + \mathrm{B}\sin[(2\pi x/\lambda) - (2\pi\nu t)] \quad (1)$$

である．このような型の解をもち，しかも，その解に現れる振動数 $\nu$ と波長 $\lambda$ が，二重性の関係 $E = h\nu$ と $p = h/\lambda$ および古典力学のエネルギー $E$ と運動量 $p$ の非相対論的な関係 $E = p^2/2m$ の両方から導かれる次の関係，

$$h\nu = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} \quad (2)$$

を自動的に満たすような波動方程式は，$E = p^2/2m$ という関係の $E$ と $p$ に

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right) \quad (3)$$

を代入して得られる演算子が波動関数に作用する形の方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{4}$$

である．これが $x$ 軸に沿って進む自由な電子に対するシュレーディンガー方程式である．

(1) 式がシュレーディンガー方程式 (4) の解になるのは，$\mathrm{B} = i\mathrm{A}$ の場合で，$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ を使うと，この解は次のように表される．

$$\psi(x,t) = \mathrm{A}\exp[(2\pi ix/\lambda) - (2\pi i\nu t)]. \tag{5}$$

ポテンシャル $V(x,y,z)$ をもつ保存力場の中の電子に対するシュレーディンガー方程式を記しておこう．

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{6}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x,y,z). \tag{7}$$

## 4. 量子力学における時間と空間の非対称性

相対論では「運動量とエネルギー」および「空間微分と時間微分」はどちらもローレンツ変換で結ばれている4元ベクトルである．そこで，2つの4元ベクトルの対応関係 (3) 式は，非相対論的な量子力学でも位置と時刻が物理量として同格の役割を演じることを期待させる．つまり，波動関数 $\psi(x,y,z,t)$ の中の変数 $t$ と変数 $x,y,z$ とは同格だと考えたくなる．しかし，実際にはそうではない．

量子力学では物理量 $O$ は波動関数に作用する演算子 $\hat{O}$ で表され，$O$ を測定したときの測定値は演算子 $\hat{O}$ の固有値に限られる．また，波動関数 $\psi(x,y,z,t)$ で表される状態に対して時刻 $t$ に物理量 $O$ を測定したときの期待値 $\langle O(t)\rangle$ は

$$\langle O(t)\rangle = \frac{\int \psi^*(x,y,z,t)\hat{O}\psi(x,y,z,t)dxdydz}{\int \psi^*(x,y,z,t)\psi(x,y,z,t)dxdydz} \tag{8}$$

で与えられる．位置の演算子は実質的に $\hat{\boldsymbol{r}} = (x,y,z)$ である．運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ は対応 (3) 式からわかるように，波動関数の変数 $x,y,z$ に作用する微分演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = (-i\hbar\partial/\partial x,\ -i\hbar\partial/\partial y,\ -i\hbar\partial/\partial z)$ である．

運動量の測定を行なって，測定値 $\boldsymbol{p}_0$ が得られるとする．この瞬間に電子の波動関数は運動量が $\boldsymbol{p}_0$ の状態に対応する波動関数 $\exp(i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$ に収縮する．波動関数 $\exp(i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$ に運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ を作用させると，波動関数は $\boldsymbol{p}_0$ 倍の $\boldsymbol{p}_0\exp(i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$ になるが，波動関数 $\exp(i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$ が運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ の固有値 $\boldsymbol{p}_0$ の固有状態である事実は，この状態の運動量を測定すると測定結果はつねに $\boldsymbol{p}_0$ であることを意味する．

ところで，非相対論的な量子力学では，電子の位置は演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ であるが，電子の時刻 $t$ は演算子ではなく，理論の単なるパラメーターである．

時間と空間の非対称性は，ヘリウム原子 He や水素の負イオン $\mathrm{H}^-$ などの2個の電子を含む系の場合，波動関数が $\psi(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,t)$ であることにも現れている．この場合，2つの電子の位置に対応する2組の変数 $(x_1,y_1,z_1)$ と $(x_2,y_2,z_2)$ が現れるが，時間の変数は2つの電子に共通の時刻の $t$ だけである．2組の空間変数に対応して，各電子にそれぞれの時刻 $t_1$, $t_2$ を指定してみても，相対時刻 $t_1 - t_2$ にどのような意味づけをすればよいのかわからない．

## 5. 時間の連続極限としての古典力学

時間の測定に対応する演算子は存在せず，すべての粒子に共通の時刻 $t$ は理論のパラメーターである，という非相対論的な量子力学での時間と空間の非対称性の原因は，量子力学の基礎となった質点の解析力学（ハミルトン力学）にある．ハミルトン形式の力学では，各質点の時刻は共通の時計で刻まれるパラメーターであるのに対して，質点の位置座標と運動量は力学変数として定式化されていることに起因しているのである．

古典力学では，任意の時刻に質点の物理量があ

る決まった値をもち，その値が測定可能であることが理論の前提になっている．たとえば，自由落下運動を考えよう．この運動が等加速度運動であることを実験的に厳密に証明するには，落下中のすべての瞬間での速度を測定して，測定値が時間とともに一様に増加することを示さねばならない．ところで瞬間速度の決定には無限小の時間間隔で位置を測定せねばならないが，これは不可能である．ガリレオが行なったように，等加速度運動では，一定時間ごとの移動距離は等差級数をなすという事実を使い，一定時間ごとの移動距離は等差級数をなすことを実験で示すことで満足せねばならない．高校物理の教科書では，自由落下運動をストロボ写真に写して生徒に分析させている．ドップラー効果を利用するスピードガンによるボールや自動車などのスピードの測定にも有限の時間がかかる．

物理現象の時間的経過を測定し，記録する方法に映画撮影がある．これはよい方法であるが，これにも問題がある．ファインマン博士の「計算機科学講義」[1] を引用しよう．「映画は 1 秒間に 24 回の割合で撮影した世界のスナップ写真という標本によって，我々の目と脳に対して継ぎ目のない動きという幻想を作り出している．しかし，標本化したという形跡がときどき顔を出す．最もよく知られている例は，おそらく古い西部劇にでてくる馬車の車輪の動きである．私が子供の頃には，だれもが次のような現象に気づいていた．馬車が動き始めるとき，最初は車輪のスポークが正しい向きに回っているように見える．スピードが増すと，車輪の回転が止まっているように見える．スピードがさらに増すと，車輪が逆方向に回転しているように見える！ この現象の説明は，標本化が不十分だということである．この現象を避けるには，写真をぼやけさせるために，長い露出時間で撮ることである．」つまり，古典力学は，とびとびの時間に抽出した標本を滑らかに連続化することが可能な現象，つまり変化の遅い現象を対象にしている．

ところで，量子力学では対象を観測すると波動関数が収縮するために，古典物理学でのように，波動関数の時間的変化を観測によって追っていくことはできない．

## 6. 再び量子論における時間と空間の非対称性について

短いパルス状の電子ビームを考えよう．時刻 $t$ での電子の位置の期待値 $\langle \boldsymbol{r}(t) \rangle$ は (8) 式の $\hat{O}$ を $\hat{\boldsymbol{r}}$ と置けば得られる．ところで，時刻演算子は存在しないが，この電子がビーム源から距離 $x$ の検出面に到達する時刻の期待値 $\langle t(x) \rangle$ を考えることができる．この期待値は (8) 式の $\hat{O}$ を $t$ で置き換え，$x, y, z$ について積分する代わりに $t, y, z$ で積分すれば求められる．時刻演算子は存在しないが，このような意味での時刻と位置の対称性が存在する．

それでは，相対論的な量子力学では時刻と位置の位置づけはどうなのだろうか．この場合の理論である相対論的な場の量子論に深入りはできないので，結論だけを書こう．この場合は時刻 $t$ も位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ も理論のパラメーターであり，位置演算子は存在しない．場の量子論での演算子は交換関係に従う場の量 [$\psi(x, y, z)$ など] だけで，これらの演算子は光子や電子などの場の量子を生成したり消滅させたりする機能をもつ．

したがって，理論のある定式化で時刻と位置座標の立場が対称だとか，非対称だとかを問題にしすぎないほうがよさそうである．

## 7. 量子力学的振動

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{9}$$

の解は

$$u_n(x, y, z) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{10}$$

という形の項の重ね合わせである．ここで $u_n(x, y, z)$ は，ハミルトン演算子 $H$ の固有関数で，$E_n$ は

固有値である（$Hu_n = E_n u_n$）．いうまでもなく，解 (10) は粒子像ではエネルギーが $E_n$，波動像では振動数が $\nu_n = E_n/h$ の状態を表している．

日常生活では時間の測定に時計を使うが，腕時計では結晶の振動という周期運動を利用している．振り子やばねや結晶の振動などの力学的な振動は，振動子を安定なつり合い点から少しずらせたときの復元力によって生じる．このような場合，振動はエネルギーが位置エネルギーと運動エネルギーの間で往復する運動である．コイルとキャパシターから構成された振動回路での電気振動は，電気エネルギーと磁気エネルギーの間の往復運動である．量子力学における振動は，以下で示すように，2つの定常状態の位相の差の周期的変動である．

波動関数は $\exp(-iE_n t/\hbar)$ という因子によって，振動数 $\nu_n = E_n/h$ で振動している．この振動，そしてこの振動数は測定可能だろうか．量子力学では，波動関数 $\psi$ で表される状態に対して物理量 $O$ を測定すると，測定値の期待値は (8) 式で与えられる．そこで，決まったエネルギーをもつ状態に対してどのような物理量 $O$ を測定しても，$\psi^*$ に含まれている因子 $\exp(iEt/\hbar)$ と $\psi$ に含まれている因子 $\exp(-iEt/\hbar)$ は打ち消しあうので，$O$ の期待値 $\langle O \rangle$ は時間的に変化せず，したがって振動は観測できない．これはボーアの仮説 (1) に対応している．古典力学の場合と同じように，エネルギーを測る基準は任意なので，原子のエネルギー $E$ には不定性があり，原子の定常状態の振動数 $\nu = E/h$ が測定できないのは当然といえる．

エネルギーを測る基準は任意でも，2つの状態のエネルギーの差は基準の選び方によらず一定である．実験で測定できるのは，2つの状態のエネルギーの差に対応する振動数

$$\nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h} \tag{11}$$

である．

異なるエネルギー固有値 $E_1$ と $E_2$ の固有状態を重ね合わせた状態では，物理量の期待値は振動数 $\nu_{12} = (E_1 - E_2)/h$ で振動する．

たとえば，軸が傾いてみそすり運動をしているこまのように，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつ電子は定常磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で，磁気力のモーメント $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ のために，ある時刻に磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の期待値が磁場に垂直であれば，$\boldsymbol{\mu}$ の期待値は振動数 $\nu = 2\mu B/h$ で磁場に垂直な平面内で回転する．（$+z$ 方向を向いた磁場 $\boldsymbol{B}$ のために，スピンが上向きの場合（磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ が $-z$ 方向を向いている場合）には電子のエネルギーに $\mu B$，下向きの場合には $-\mu B$ が付け加わる．したがって，スピン上向きと下向きの状態のエネルギー差は $2\mu B$ であるが，この値はみそすり運動の振動数 $\nu = 2\mu B/h$ の $h$ 倍である．）

$t = 0$ に電子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の期待値が $+x$ 方向を向いているように実験で設定できれば，時間 $t$ が経過したあとで磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の向きを観測すれば，その期待値は $2\pi\nu t$ だけ回転しているはずである．筆者はこのような実験の具体的な例を知らないので，素粒子物理の適切な例を最後に示す．

上記のミクロな電子の磁気モーメントの回転運動の振動数（回転数）を観測するには，回転数と同じ振動数の電磁波を外部から送ればよい．そこで，外部から電磁波を送れば，その振動数 $\nu$ がみそすり運動の振動数に一致したときにエネルギーの強い吸収が起こり，電子のスピンの向きが下向きから上向きに変わる．この現象は電子が $\nu = E/h$ で振動している実験的証拠である．

## 8. 原子時計

上記の電磁波の吸収はボーアの仮説 (3) に対応している．このような現象を利用しているのが，計量法で時間の単位の定義に採用されている原子時計である．基底状態にあるセシウム原子（$^{133}Cs$）のビームを空洞共振器に導いて，そこで水晶発振器から送られてきたマイクロ波と共鳴させると，検出器に鋭い共振曲線が現れる．セシウム原子の基底状態の2つの超微細準位間の遷移で放射されるマイクロ波の振動が91億9263万1770回くりかえされると，1秒の時間が経過したことになる．

これを使ったのが，セシウム原子時計である．実際には，この遷移に対応する放射の振動数 $\nu_0$ を基準にし，$\nu_0$ に準拠した振動数 $\nu$（$\nu_0 < \nu$）の発振器をつくり，その $\nu$ 回の振動ごとに1秒を刻む装置を原子時計という．天体の観測から得られる時間の単位と，原子時計からのそれを調整したものが，今日の標準時のよりどころである．

## 9. ニュートリノ振動

自然界を構成する基本粒子の1つにニュートリノがある．ニュートリノは，原子核のベータ崩壊でエネルギー保存則と角運動量保存則を成り立たせるために，1930年にパウリが導入した粒子である．ニュートリノとは電気的に中性で，質量が小さい粒子という意味で，フェルミが命名した．原子核のベータ崩壊でニュートリノは電子とペアで現れるが，この他に，つねにミュー粒子とペアで現れるものと，つねにタウ粒子とペアで現れるものが存在し，合計3種類の独立なニュートリノが存在する．これらはそれぞれ電子ニュートリノ（記号 $\nu_{\mathrm{e}}$），ミュー・ニュートリノ（記号 $\nu_\mu$），タウ・ニュートリノ（記号 $\nu_\tau$）と呼ばれている．$\nu_{\mathrm{e}}$ と電子，$\nu_\mu$ とミュー粒子，$\nu_\tau$ とタウ粒子のペアは基本粒子の弱い相互作用を媒介するゲージ・ボソンのWボソンによって生じる．

ニュートリノの質量はきわめて小さく，これまでその精密な測定が行なわれてきたが，質量が0ではないという確実な実験結果は存在しなかった．電子ニュートリノの質量の上限値は電子の質量の1/30000以下という微小な値である．そこで，ニュートリノの質量は0であると考えられるようになり，素粒子の標準模型ではニュートリノの質量は0だとしている．

同じ質量が0の素粒子の光子は，理論のゲージ不変性によって，質量が0であることが要求されている．しかし，ニュートリノの質量が0だという理論的根拠は存在しない．そこで，ニュートリノは実験で得られている上限値以下の微小な質量をもつ可能性がある．

基本粒子の質量はヒッグス・ボソンと基本粒子の相互作用によって生じると考えられている．そこで，ヒッグス・ボソンとの相互作用によって3種類のニュートリノ $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ が異なる質量 $m_1, m_2, m_3$ をもっている可能性がある．Wボソンの結合様式とヒッグス・ボソンの結合様式は理論的に独立なので，ニュートリノの質量（つまりエネルギー）の固有状態 $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ と弱い相互作用で生成・消滅される3つの状態 $\nu_{\mathrm{e}}, \nu_\mu, \nu_\tau$ は異なる可能性がある．つまり，質量の異なる3つのニュートリノ $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ が存在し，$\nu_{\mathrm{e}}, \nu_\mu, \nu_\tau$ はそれらが混合したものなので，弱い相互作用を使って，エネルギー固有状態の特定の重ね合わさった状態の生成・消滅を検出できる可能性がある．

この混合は3次元の特殊ユニタリー変換で表せる．ここでは簡単のため，

$$\nu_{\mathrm{e}} = \nu_1, \tag{12a}$$

$$\nu_\mu = \nu_2 \cos\theta + \nu_3 \sin\theta, \tag{12b}$$

$$\nu_\tau = -\nu_2 \sin\theta + \nu_3 \cos\theta \tag{12c}$$

と表せる場合を考える．

パイ中間子が崩壊して，運動量 $p$ をもつミュー・ニュートリノとミュー粒子のペアが発生したとする．発生したミュー・ニュートリノはエネルギーが $E_2 = [(pc)^2 + (m_2c^2)^2]^{1/2}$ の $\nu_2$ とエネルギーが $E_3 = [(pc)^2 + (m_3c^2)^2]^{1/2}$ の $\nu_3$ とが(12b)式で重ね合わさった状態なので，発生してから時間 $t$ が経過すると，その波動関数は

$$\nu_\mu(t) = \nu_2 \cos\theta \exp(-iE_2t/\hbar) + \nu_3 \sin\theta \exp(-iE_3t/\hbar) \tag{13}$$

となる．(12)式を逆に解いて，(13)式右辺の $\nu_2$, $\nu_3$ を $\nu_\mu, \nu_{\mathrm{e}}$ で表すと，時刻 $t=0$ に発生したミュー・ニュートリノが時刻 $t$ にミュー・ニュートリノである確率 $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ は

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = |\cos^2\theta \exp(-iE_2t/\hbar) + \sin^2\theta \exp(-iE_3t/\hbar)|^2 = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2[(E_2 - E_3)t/2\hbar] \tag{14}$$

となる．また，このとき $\nu_\mu$ が $\nu_\tau$ に転化している確率 $P(\nu_\mu \to \nu_\tau)$ は

$$P(\nu_\mu \to \nu_\tau) = \sin^2 2\theta \sin^2[(E_2 - E_3)t/2\hbar] \quad (15)$$

である．

このように，ニュートリノが質量をもつと，ニュートリノが飛行するのにつれて別の種類のニュートリノになったり，もとのニュートリノに戻ったりする．これをニュートリノ振動という．このようなニュートリノ振動は1962年に牧二郎，中川昌美，坂田昌一によって予想された．

ミュー・ニュートリノは核子（陽子，中性子）に衝突するとミュー粒子を発生させるが，タウ粒子を発生させることはない．タウ粒子を発生させるのはタウ・ニュートリノだけである．ニュートリノの質量 $m$ は小さいので，$E \fallingdotseq pc + (m^2c^3/2p)$ と近似すると，$(E_2 - E_3)t/2\hbar \fallingdotseq (m_2^2 - m_3^2)c^3t/4\hbar p$ となる，したがって，パイ中間子の崩壊を利用してつくられたミュー・ニュートリノのビームを標的の核子にあてて，ミュー粒子やタウ粒子の発生を検出し，その結果，ミュー・ニュートリノ・ビームの予想以上の減少やタウ・ニュートリノへの転換が発見されたら，(14), (15) 式を使って，混合角 $\theta$ とニュートリノの質量差 $m_2^2 - m_3^2$ がわかることになる．ここで，$c$ は真空中の光の速さである．

質量差 $\Delta m^2$ が小さい場合にニュートリノ振動を観測するには，時間 $t$ を大きくする必要がある．このために，宇宙空間からやってくる宇宙線の陽子と大気の上層部の原子核との衝突で発生するパイ中間子の崩壊で発生するミュー・ニュートリノや，太陽の中心部で起こる核融合反応で発生する電子ニュートリノの利用が考えられる．1998年に岐阜県神岡のスーパーカミオカンデ検出器（**写真2**参照）に地球の裏側からやってくるミュー・ニュートリノは上方からやってくるミュー・ニュートリノに比べ確実に少ないことが確かめられた．この減少がニュートリノ振動によるものとすると，



**写真2**　スーパーカミオカンデ検出器（東京大学宇宙線研究所提供）．

$\Delta m^2 = (10^{-3} \sim 10^{-2})(\mathrm{eV}/c)^2$ である．

ニュートリノ振動の検出を目的として，茨城県つくばの高エネルギー加速器研究機構からミュー・ニュートリノ・ビームを250 km 離れた岐阜県神岡のスーパーカミオカンデ検出器に向けて放射する実験が1999年から始まった．成果が待たれる．

## 10. おわりに

自然界は複雑で変化に富んでいる．この豊かな多様性の基礎にはミクロな世界の構成要素の同一性がある．つまり，すべての分子，原子，原子核などはそれぞれ完全に同一のスペクトルを示し，固有の周期で時を刻む．この完全な同一性は波動関数に対するシュレーディンガー方程式によって保証される．宇宙のいたる所で，同一のシュレーディンガー方程式が成り立ち，電子の質量は同じで，自然定数の値も同じであるという事実は不思議に思われる．しかし，宇宙がビッグバンによって始まったのであれば，当然なのであろう．

### 参考文献

1) R.P. ファインマン：原，中山，松田訳：「ファインマン計算機科学」，岩波書店，(1999).

（はら・やすお，帝京平成大学情報学部）

# 宇宙における時間

## タイムマシンと宇宙の創生



佐藤 勝彦

### 1. はじめに

「時間とは何か？ 誰も私に問わなければ，私はそれを知っている．誰かそれを問う者に説明しようとすれば，私は知らないのである.」これは有名な聖アウグスチヌスの言葉である．確かに私達は時間というものを，日常体験から“よく知っており”，なんら日常の生活に困ることはない．しかし，あらためて時間とは何かと問われれば，しどろもどろになってしまう．物理学の進歩，中でも特殊相対論，一般相対論という時空の物理学の進歩により，アウグスチヌスの時代とは比べものにならないほど，私達の時間にたいする概念は豊かになり，また深まっている．今持って，誰もが満足するような時間の説明をすることが容易ではないが，物理学的に時間とは何かと問われれば，時間空間の物理学である相対論の立場から答えることができる．

我々の住む世界は，「3次元の空間と1次元の時間からなる4次元多様体」とその中に存在する「物質」を合わせた系である．時空の性質は計量テンソル，$g_{\mu\nu}(x^\mu)$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$（$x^\mu$ は時間の座標，$x^0$ 空間の座標 $x^1,x^2,x^3$，を示す）で記述され，物質は宇宙を構成する粒子の場，$\psi^{(i)}$ $(x^\mu)$ ($i$ は粒子の種類を表す）で記述される．たとえば，現在の科学的な標準的宇宙理論であるビッグバンモデルでは，この時空多様体は，今から130億年の昔，“無”から創生され空間は膨張を続けている．

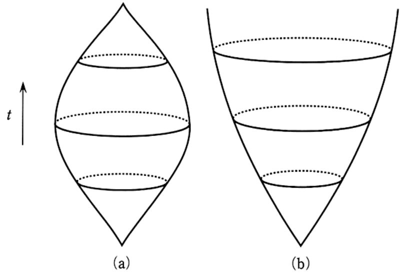
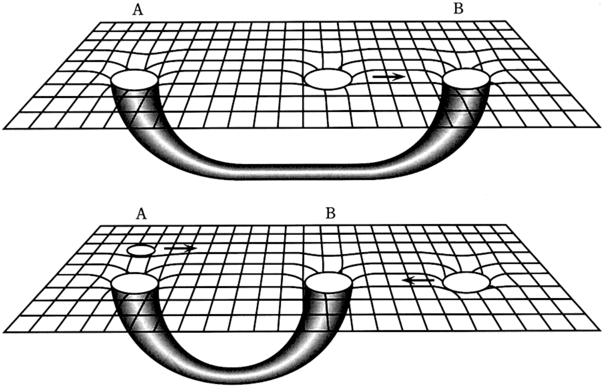



図1　収縮に転ずる宇宙モデルでの時空多様体 (a) と永遠に膨張を続けるモデルの時空多様体 (b).

この宇宙がいつか収縮に転ずるのか，永遠に膨張を続けるのか，現在誰も明確に答えることはできない．2つの場合について我々の住む時空多様体の模式図を，図1に示す．宇宙時刻のある瞬間，$x^0$ に，時空の計量と物質の分布，存在様式が与えられると，一般相対論を含む物理学の基本法則に従って，時刻 $x^0+\Delta x^0$ の時空の計量と物質の存在様式が決められる．このようにして，宇宙の創生の瞬間から宇宙の終末（もしあるとすれば）まで，もしくは永遠の未来までの時空の構造と物質の存在様式が定められることになる．宇宙はこのように，創生の直後から物理法則の織りなす因果の関係として進化するのである．宇宙の進化は量子論的な揺らぎによって確率的となる．この偶然




平面の 2 つの場所を結ぶワームホール

図 2　K. Thorne のタイムマシン．

性と，物理法則のカオス的性質が絡まり世界は多様なものとなる．いわば，物理学の基本法則という縦糸と，偶然性という横糸によって，4 次元の時空多様体と物的存在を合わせた宇宙は多様で豊かな構造を持ちながら進化していくのである．これが現在，多くの物理学者が頭に描く，標準的宇宙進化のモデル，パラダイムである．

しかし，相対論，量子論が描く世界は，このような，直感と調和のとれた無矛盾な描像ばかりではない．A. Vilenkin[1)]，J. Hartle と S. Hawking[2)] が理論を展開したように，時空の特異点なしに宇宙の創生を語るには，虚数の時間が必要となる．またアインシュタイン方程式の解には時空多様体が時間的にループしたような解（タイムマシン解）も存在している．タイムマシンが存在すると，親殺しのパラドックスという深刻な論理的矛盾が生じてしまうが，驚くことにアインシュタインの相対論は，そのような解を含んでいるのである．この解説では，物理的時間を再考する参考となるよう，タイムマシン問題，最近の宇宙創生論の進展などを紹介したい．

## 2. タイムマシン
### —時間的閉曲線（CTC）—

10 年ほど前，米国物理学会の会長も務めた著名な相対論研究者，K. Thorne[3)] が，これまた物理学界の最高権威学術誌と考えられている学術誌に，具体的にタイムマシンの作り方の論文を書いた．図 2 に示すように，2 つの異なる場所を結ぶ，通行可能なワームホールを考える．そして B の出口を光速に近い速さで振動させる．こうすると特殊相対論から静止している入り口，A の近傍の時間に比べると振動している入り口の時間の進み方は遅くなる．たとえば，振動していない方の時刻がすでに 10 時でも，振動している方はまだ 5 時ということも起こり得る．こうしておいて，10 時ちょうどに静止した入り口の近くにある家を出発し，もう一方の入り口，B まで歩いたとしよう．到着したとき自分の腕時計の時刻は 10 時 10 分，直ちにこの入り口 B に飛び込み，出発したときの静止した入口 A から飛び出そう．自分の腕時計の時刻は 10 時 10 分であるが，家の柱時計の時刻は 5 時 5 分ということが起こる．つまり過去にタイムトラベルできたわけである．このようなことが実際

可能なら，少しぶっそうな話だが，自分を生む前の母親を殺すことだってできる．しかし，そうできるとすると自分は存在しないはずである．存在しない自分がどうして過去に行って母親を殺すことができるのか，という自己矛盾が発生する．このような閉じた因果の曲線のことを時間的閉じた曲線（Closed Timelike Curve），略して CTC と呼ぶ．

相対論がこのような CTC を持つ時空解を許していることは，はるか前から知られていたことである．たとえばよく知られた解はゲーデル（Gödel）の宇宙モデルである．これは，物質の密度 $\rho$ と圧力 $P$ が

$$\rho = P = \frac{1}{16\pi G a^2}$$

である宇宙が，角速度

$$\Omega^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd} u_b \nabla_c u_d = -\frac{1}{\sqrt{2}a}\delta_3^a$$

で，$z$ 軸周りに回転しているモデルである．その計量は

$$ds^2 = a^2\left(-(dt + e^x dy)^2; dx^2 + \frac{1}{2}e^x dy^2 + dz^2\right)$$

である．この時空には CTC が存在し

$$\begin{aligned} x &= \ln(\cosh 2r + \sinh 2r \cos\phi), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\phi}{\cosh 2r + \cos\phi}, \\ \frac{t}{a} &= -\sqrt{2}\,\phi + 2\sqrt{2}\tan^{-1}\left(e^{-2r}\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

で与えられる．従ってこの世界では因果はめぐり，原因は結果でもあるのである．同様に CTC を持つ時空としては Taub-NUT 時空が知られている（たとえば文献 4, 5)）．

親殺しのパラドックスが生じては困るので，物理学者としては対策を考えなければならない．第 1 の考えかたは，相対論がタイムマシンを許しても，量子論がそれを禁ずるという立場である．漫画ドラえもんでは「タイムパトロール」がいて，タイムマシンを用いて歴史を変えようとする悪人を取り締まっていることになっている．いわば量子論がこの取り締まり官の役割をするであろうという立場である．S. Hawking の時間順序保護仮説[6]は，通行可能な負のエネルギーを満たしたワームホールは，量子論的効果を考えるならば，不安定となりつぶれてしまうという仮説である．K. Thorne は，カシミア効果などにより，負のエネルギーをワームホールに満たすことができるかもしれないと主張しているが，Hawking は，CTC が存在するほど強く曲がった時空では量子重力的効果で，そこでの計量は発散してしまうと主張している．しかし，これは仮説という主張にも現れているように，決定的根拠があるわけではない[7]．

第 2 の立場は，タイムマシンを量子論の多世界解釈と絡めてこの矛盾を避けようとする立場である．Everett によって提唱された量子論の観測問題を解く解釈は世界は絶えず無限に分岐し続けており，無限の平行宇宙が存在する．Deutsch と Lockwood[8] はタイムマシンで行くことのできる世界は他の平行宇宙であるとするのである．自分の未婚の頃の母親に対応する平行宇宙の女性を殺したとしても，その宇宙での自分に対応する人間は生まれなくなるが，それは自身の誕生とは無関係である．もちろん他の平行宇宙の若き頃の自分自身と会うこともできれば握手も，会話もできる．そして，そこから何ら因果律に反することは生じない．Deutsch と Lockwood は次のようにいい切る．「タイムトラベルに対するよくある異議は，物理的実在についての誤ったモデルに基づくものである．従って，今持って時間旅行の概念を拒否使用とする者は，何か新しい物理学を作り上げるか，それとも新しい哲学的議論を展開する義務がある．」と．このように，多世界解釈の下では何ら論理的，因果的矛盾は生じない．しかし，他の平行宇宙から，年老いた私自身に対応する人物が，私を訪問してくれない限り，この理論を証明することもできない．

Novikov[9] はいくらか変わった立場で CTC を考えている．リング状プールでは水が循環し周期的に水は元に返ってくるが，CTC が実在したとき，すべての因果が周期的に繋がっているなら何

ら矛盾は生じない．原因が結果を生み，それが原因となって新たな結果が生じ，それがリング状に繋がるなら，親殺しのパラドックスなど矛盾は生じない．しかし，その世界は奇妙な世界である．そこではすべては決定されており，自由意志は存在しない．Novikov もこれを解決する方法があるわけではない．ただ「我々が自由意志と思っている者は実は幻想かもしれない」というにとどめている．

## 3．宇宙の創生

素粒子論的宇宙の創生論の研究が始まる 1980 年以前においては，多くの研究者は宇宙は時空の特異点から始まったと，信じていた．「相対論の枠内では，ある当然な仮定の基に，宇宙は特異点として必然的に始まらざるを得ない.」ことを示した，Penrose と Hawking の特異点定理を回避し，特異点を除こうとした試みは多くあったが成功したものはなかった．しかし，1980 年代になって，力の統一理論に基づきインフレーション理論が提唱され，これによって量子論的なミクロな宇宙さえ作られれば，後はインフレーションに任せることで宇宙の創生を論ずることが可能になったのである．A. Vilenkin[1) ] による「“無” からの創生」，Hartle と Hawking[2)] による「果てのない条件からの宇宙の始まり」が提唱され，現在の科学的な宇宙創生論のパラダイムとなっている（図 3）．これらの理論では，創生直後からインフレーションを起こす必要から，真空のエネルギーに満ちた一様等方な閉じた宇宙，ドシッタ宇宙を作る．通常の実時間でのアインシュタイン方程式の解，ドシッタ解は

$$a(t) = l\cosh\left(\frac{l}{t}\right).$$

ここで $l=(8\pi G\rho_\nu/3)^{-1/2}$ はドシッタ宇宙の特徴的長さで，$\rho_\nu$ は真空のエネルギー密度である．このドシッタ解を虚時間，$\tau=it$，に解析接続して得られる虚時間のアインシュタイン方程式の解，

$$a(t) = l\cos\left(\frac{\tau}{l}\right)$$

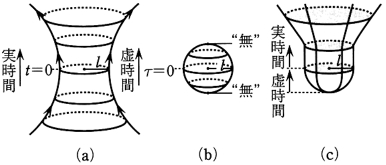



**図 3**　量子論的宇宙の創生．(a) ドシッタ宇宙の解．無限の過去から収縮してきた宇宙は時刻 $t=0$ で跳ね返り膨張に転じ無限の未来まで膨張を続ける．(b) ドシッタ・インスタントンの解．(c) 2 つの解を解析接続して作り上げられた宇宙創生のモデル．下側は $\tau<0$ のドシッタ・インスタントン解，上側は $t>0$ のドシッタ解．

は，ドシッタ・インスタントンと呼ばれている．Vilenkin の立場でいえば，無の状態，$a(\tau=-\pi l/2)=0$ の状態から，$a(\tau=t=0)=l$ の状態へのトンネル効果を現す．

$\tau=t=0$ から実時間に繋がり，ドシッタ宇宙として宇宙は直ちにインフレーションを始めることになる．トンネル効果という半古典的方法ではなく，時空のシュレディンガー方程式，ウイーラ・ドウィット方程式から宇宙の波動関数を求めることにより，宇宙の進化の議論をすることもできる．そして，上記のインスタントンで記述される経路が大きな確率を持っていることが示されている．

虚数の時間は元々トンネル効果の確率や経路積分の便宜から導入されたものである．実時間の前に虚数の時間として宇宙が始まったとすれば，始まりの時空の特異点も無くなる．Hawking は無境界仮説を提唱した頃，「虚時間を使うことは単なる数学的トリックにすぎず，実体や時間の本質については何も語っていないといってもかまいません．私のような実証主義者にとって，観測結果を説明する数学的モデルを定式化するのに，虚時間が役に立つかどうかだけが，可能な問いです.」と語っている．しかし，1991 年の東京での講演では「虚時間の概念は，次の世代には地球が丸いのと同様に自然だと考えられることになるでしょう．虚時間は世界を形作る何かなのです.」といい切ってい

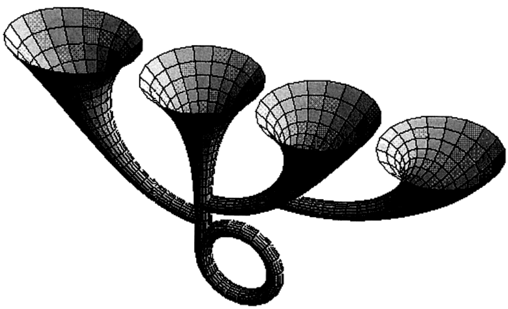


図 4　時間的閉曲線を持つ時空からの宇宙創生 (Gott and Li 1998)[7].

る[6]．虚数の時間が存在するかしないかという議論は不毛であるが，存在すると考えたほうが，論理の展開に便利ならばあると考えて研究を進めた方が生産的である．

宇宙創生論はかならずしも“無”からの創生ではなく，すでにある何かから膨張宇宙が生じるという類のモデルも，いくらか提案されている．中でも，奇抜なモデルは Gott と Li[7] の時間的閉曲線，CTC を持った時空からの宇宙創生であろう（図 4）．すべてが因果ループで定められた世界から，インフレーションを起こす宇宙が核生成する．従って，このモデルでは宇宙創生の第 1 原因は存在しないし，宇宙時刻を遡っても，宇宙創生の第 1 原因には行き着かない．

宇宙創生の量子論の最近の話題は，多次元宇宙の創生である．超ひも理論の進展，刺激により，多様なアプローチが進められている．従来の多次元宇宙モデルでは，時空となる 4 次元を除いた残りの次元，内部空間はプランクスケールの大きさにコンパクト化されなければならない．一方，3 次元空間となる方向には膨張しなければならない．このようなカルツア・クライン宇宙モデルのもっとも単純なものは，真空のエネルギーに満ちた多次元宇宙である．すでに，ドシッタ・インスタントンと類似のインスタントン解や，宇宙の波動関数が調べられている[10,11]．内部空間が収縮，もしくは創生時のままの大きさを保ち，外部空間がインフレーションを起こすモデルに繋がるインスタントン，また共にインフレーションを起こしてしまう解に繋がるインスタントン解などが求められているが，波動関数の振る舞いからは，内部空間も外部空間も共に大きくなるインスタントンの寄与がもっとも大きい．内部空間を小さく保ち，外部空間でインフレーションを起こすためには，内部空間，外部空間で非対称な物質場を考えざるを得ない．

最近の新たな，もっとも興味深い宇宙のモデルはブレーン宇宙モデルである．究極の統一理論となりうる超ひも理論として考えられている M 理論の示唆するところでは，高次元の空間の中に，図 5 のように，3 次元の膜が存在し，それが我々の住む宇宙である[12]．この膜に垂直な方向は決してコンパクト化されていないが，物質はこの膜内に閉じ込められていると考えるのである．Rundall と Sundrum[13] は図 5 に示すように 5 次元 anti-deSitter 中に，3 次元の空間の膜があるモデルを用いて，エネルギー階層問題を解決しようとするモデルや，5 次元的な重力がこの膜内では，ニュートン的 4 次元重力則となるモデルを示した．5 次元での計量は

$$ds^2 = a^{\pm kw}(-dt + dx^2 + dy^2 + dz^2) + dw^2$$

で，$k = \sqrt{2|\Lambda|/3}$ である．$\Lambda$ は 5 次元宇宙定数である．

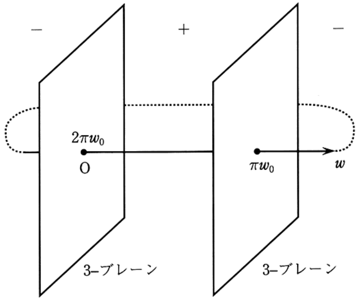



図 5　Rundall-Sundrum のブレーンモデル．5 次元 anti-deSitter 時空の中の 3 次元の "板" が我々の住む宇宙である．図の中の符号は計量テンソルの 4 次元部分の前の指数関数の指数の符号である．彼らの 2 番目のモデルでは $w = \pi R$ が我々の世界で，正の表面エネルギーを持つ．この効果により中での重力則は，5 次元的世界の重力ではなく，4 次元的重力則，ニュートン的万有引力則となる．

特にブレーンが正の表面張力を持つ後者のモデルは，多くの研究者によって調べられ，ブレーン内での重力則が確かにニュートン則となること[14]，またその中での時空の方程式，4 次元的アインシュタイン方程式に補正項が加わった方程式[15] などが求められた．さらに，興味深いことは，このブレーンの世界がまさに，フリードマン宇宙となるような厳密な解が見つかったことである[17,18]．

単なる，5 次元 anti-deSitter 時空のかわりに，質点が存在する anti-deSitter 時空，つまり 5 次元 Schwarzshild-anti deSitter 時空を考える．

$$ds^2 = -A(R)dt^2 + \frac{dR^2}{A(R)} + R^2 d\Omega_{(3)}^2,$$

$$A(R) = 1 + \frac{R^2}{l^2} - \frac{\alpha^2}{R^2}.$$

ここで $l = \sqrt{-6/\Lambda}$ は 5 次元 anti-deSitter 時空の特徴的長さ，$\alpha^2$ は質点の質量である．

同じ 5 次元 Schwarzschild-anti deSitter 時空をもう一つ準備し，2 つの時空を半径，$R$ のところで糊づけする．そしてこの 3 次元の膜に正の張力を持たせる（図 6）．するとブレーンが一様等方な空間で物質密度が $\rho$ であるとき，

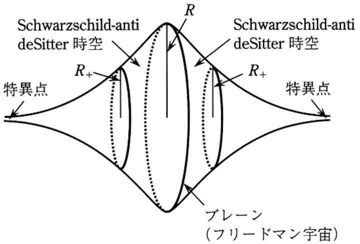



図 6　2 つの 5 次元 Schwarzschild-anti deSitter 時空を半径，$R$ で糊づけする．この 3 次元の膜に正の張力を持たせたモデル．

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{1}{R^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} + l^2\left(\frac{4\pi G\rho}{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{R^4}$$

が得られる．これはフリードマン宇宙モデルの膨張の式に，2 つの付加項（右辺の最後の 2 つの項）が加わったものである．これらの項は物質密度が小さくなり，スケール項が大きくなった時点では，寄与は小さく無視できるが，宇宙初期には効果を現し，宇宙が単なるフリードマン宇宙ではなく，ブレーンの世界であることを示すものである．最後の項は，$R$ の 4 乗で減衰することから，仮想的な "放射" のエネルギーからの寄与と読むことができる．すると放射エネルギー密度は $\rho_r = 3\alpha^2/8\pi G R^4$ であることがわかる．この放射が 3 次元体積，$2\pi^2 R^3$ を満たしているとすると，その全エントロピーは

$$S_r = \frac{\pi^2 \alpha R_+}{G}$$

となる．ここで $R_+ = \sqrt{\alpha l}$（但し $\alpha \gg l$ の極限）は 5 次元 Schwarzschild-anti deSitter 時空の地平線半径である．このエントロピーは 5 次元ブラックホールのエントロピー $S_{BH} = \pi^2 R_+^3/G_5$ と見事に一致する[16]．つまりこのブレーン宇宙の仮想的放射のエントロピーの起源は，5 次元ブラックホールのエントロピーなのである．ただしここ

で $G_5 = Gl$ は5次元での重力定数である．

ブレーン宇宙でのブラックホールについても興味深い研究[19,20]が進んでいる．

この5次元 Schwarzschild-anti deSitter 時空を張り合わせた宇宙の“無”からの創生を記述する，虚時間での膨張の式も，$\tau = it$ とおくことにより容易に求めることができる[16]．このようにこのモデルは，極めて理解しやすい構造を持っている．

現在ブレーン宇宙モデルは，多くの研究者の興味を引きつけ，大きく進展しつつある．これが新たなパラダイムとなるようなものとなるのか，一つの流行なのか現時点では判断できないが，たとえ後者であっても，このモデルが豊かな内容を持っていることは，確かである．

## 参考文献


1) A. Vilenkin, *Phys. Lett.* **133B** (1983) 177.
2) J.B. Hartle, S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 296.
3) K. Thorne, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1446.
4) S. Hawking, G. Ellis, Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge Univ. Press 1973.
5) 佐藤文隆，小玉英雄，一般相対論，岩波書店，1992年.
6) S. Hawking, 時間順序保護仮説, NTT 出版, 1991年.
7) J. Richard Gott, III, Li-Xin Li, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 023501.
8) D. Deutsch, M. Lockwood, 日経サイエンス, Scientific American, March, 1994.
9) I. Novikov, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 1989.
10) X.M. Hu, Z.C. Wu, *Phys. Lett.* **B149** (1984) 87.
11) H. Ochiai, K. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000) 893, **104** (2000) 印刷中.
12) N. Alkani-Hamed, S. Dimopulos, G. Dvali, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263, *Phys. Rev.* **D50** (1999) 086004.
13) L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370.
14) J. Garriga, T. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2778.
15) T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 024012.
16) J. Garriga, M. Sasaki, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043523.
17) P. Krauss, hep-th/9910149.
18) D. Ida, gr-qc/9912002.
19) A. Chamblim, S.W. Hawking, H.S. Reall, hep-th/9909205.
20) T. Shiromizu, M. Shibata, hep-th/0007203.


（さとう・かつひこ，東京大学大学院理学系研究科）

# 時間のアトム



江口　徹

## 1．始めに

私たちのように自然科学に関係するもの，あるいはもっと広く一般社会の人々にとっても，我々の持っている時間・空間に関する考え方に決定的な影響を及ぼしたのは，やはり今世紀はじめに現われた相対性理論だったのではないかと思います．よく知られているように，1905年に提案された特殊相対性理論の中でアインシュタインは，光の速度が座標系に依らないことを仮定すると互いに等速度で運動する座標系の間がローレンツ変換によって結ばれること，ローレンツ変換により時間と空間は互いに混じり合い，4次元の時空（ミンコフスキー空間）を構成することを示しました．さらにこれから，同時刻性の否定，運動する物体での時計の遅れ，質量とエネルギーの等価性など相対論以前の常識を覆す結論を次々に導きました．またアインシュタインは力学や電磁気学などの物理学の法則がローレンツ変換の下で不変になること，したがって等速度で運動する座標系で同じ物理法則が成立することを証明しました．

特殊相対性理論は現在ではその数学的な仕組みは十分に解明されて，現代物理学の柱のひとつとして最も基本的な役割を果たしています．特に，現代の素粒子論を基礎づける場の量子論は特殊相対論の要請を満たすように構成されています．

今，空間座標が $x, y, z$, 時間が $t$ の時空点 $P$ と空間座標が $x+dx, y+dy, z+dz$, 時間が $t+dt$ の時空点 $P'$ の間の4次元的な距離（世界間隔）の2乗を $ds^2$ で表わしましょう．ミンコフスキー空間での世界間隔は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1)$$

で与えられます．ここで $c$ は光速度です．今, $ds = 0$ とおくと, $(dx^2+dy^2+dz^2)/dt^2 = (\text{速度})^2 = c^2$ を得るので，光が結ぶ2点間の世界間隔は $ds = 0$ に等しいことがわかります．$x$ 方向へ速度 $v$ で運動する新しい座標系に移ることを考えます（$|v| < c$ とする）．新しい座標を $(x', y', z', t')$ とし，古い座標 $(x, y, z, t)$ と次の変換

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad (2)$$
$$y' = y, \quad z' = z$$

で結ばれていると仮定しましょう．(2) が $x$ 方向へのローレンツ変換です．少し計算すると (2) は世界間隔 (1) を不変に保つことがわかります．このことから光速は座標系のとり方に依らないことがわかります．

(1) は一見複雑な変換にみえますが，みやすくするために $ct$ をあらためて $t$ とおき，パラメター $\alpha$ を $\tanh\alpha = v/c$ で定義すると

$$t' = t\cosh\alpha - x\sinh\alpha,$$
$$x' = x\cosh\alpha - t\sinh\alpha, \qquad (3)$$
$$y' = y, \quad z' = z$$

と書きなおせます．これは，よく知られた空間回転についての変換則とよく似ています．$z$ 軸周りの角度 $\theta$ の回転では座標は

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta, \quad z' = z \tag{4}$$

のように変換します．(3)，(4) を比べると，$\cos i\alpha = \cosh\alpha$ などの関係があるためローレンツ変換はいわば時間軸と空間軸の間の“虚数角度”の回転になっていることがわかります．

世界間隔 (1) では時間 $t$ は空間座標 $x, y, z$ と比べて $dt^2$ の前の符号がマイナスになっている所だけが違っています．この符号のことをシグネチャーと呼んでいます．すなわちミンコフスキー空間はシグネチャー (−,+,+,+) を持ち，この符号が時間と空間を区別する原因になります．もし我々の住む空間がミンコフスキー空間ではなくてユークリッド空間

$$ds^2 = c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

だったとすると，この場合には空間と時間の区別がまったくなくなってしまいます．

日常生活で，あるいは我々の心理の中で時間と空間とはまったく違った振る舞いをします．我々は空間的には左右に動くことができますが，時間的には前に進むだけで後ろに戻ることはできません．また，空間的に同じ位置に留まったまま時間が増加することはもちろん可能ですが，一方時間が同じまま（すなわち一瞬にして）空間的な位置を変えることは不可能です．アインシュタインは時間と空間の持つ性質のこうした明らかな違いにもかかわらず，この違いを数学的に突き詰めていくと最後には我々がミンコフスキー空間に住んでおり，粒子の運動が正の光円錐の内側に限られると仮定することですべて整合的に説明されることを示しました（正の光円錐の内側 $\mathcal{C}_+$ とは $\mathcal{C}_+ = \{(t,x,y,z)|t \geq 0, t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}$ で定義される領域です）．（図 1 参照．）

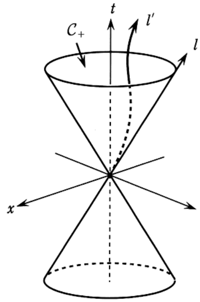



図 1　光円錐 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ を表わす（$z$ 軸は図では省略した）．粒子の運動は光円錐の内側で $t > 0$ の領域 $\mathcal{C}_+$ の中で生じる．光は光円錐のふちに沿って（$l$），質量を持つ粒子は光円錐の中側（$l'$）を運動する．

時間と空間の見掛け上の大きな違いが相対性理論を発見するための重要な心理的障害となっていたことは明らかです．アインシュタインはこうした障害をあたかも易々と乗り越えていったようにみえます．相対論の発見に向けて彼の心の中にどんな葛藤があったのか残念ながら伺い知ることはできません．

ここで詳しく述べることはできませんが，ミンコフスキー空間上で定義された理論（たとえば場の量子論）とユークリッド空間上で定義された理論には密接な関係があることが知られています．ミンコフスキー空間上の場の量子論に現われる種々の関数は，時間 $t$ を $it$（$i$ は虚数単位）と置き換えることによってユークリッド空間上の関数に解析接続することができてユークリッド空間上の理論の結果と一致することがわかります．正確には因果律を満たし正値性を持つミンコフスキー空間上の場の量子論がユークリッド空間上の場の量子論に解析接続されます（オスターワルダー–シュラーダーの定理）．あとでみるように，一般相対性理論においても時間を虚数の領域に接続して調べる必要がしばしば生じます．こうした事情をホーキングは「世界はユークリッド空間からできているが我々がそれを知覚するときにミンコフスキー空間にみえる」といったことがあります．第 3 節でブラックホールを表わす時空は虚数時間の方向に周

期性を持つことを示しましょう．

## 2. 一般相対性理論の時空

1916年に最終的に完成された一般相対性理論でアインシュタインは特殊相対性理論よりさらに進んで，質量や運動を持つ物体の周りの時空がゆがんでいること，こうした時空のゆがみが重力の力として認識されることを示しました．一般の曲がった時空を考えましょう．曲がった時空の中の世界間隔は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を用いて

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \qquad (6)$$

と表わされます．ここで計量 $g_{\mu\nu}(x)$ は添字 $\mu\nu$ について対称な関数です．

今，特に $g_{00} = -1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, g_{\mu\nu} = 0,\ \mu \neq \nu, x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と置くと $ds^2$ はミンコフスキー空間の世界間隔 (1) に帰着します．一般相対性理論では計量はすべての時空点でシグネチャー (-,+,+,+) を持つと仮定します（正確にいうと，各点で計量は $g_{\mu\nu}$ は $4\times4$ の対称行列なので対角化が可能ですが，このときの対角要素が符号 (-,+,+,+) を持つという意味です）．したがって，各時空点の周りでは (6) はミンコフスキー空間に近い振る舞いをしますが，こうした局所的なミンコフスキー空間が張り合わさって全体の曲がった空間ができています．

アインシュタインは曲がった時空の計量 $g_{\mu\nu}(x)$ がアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}R(x)g_{\mu\nu}(x) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}(x) \quad (7)$$

によって決定されることを示しました．ここで $G$ はニュートンの重力定数，$R_{\mu\nu}$,$R$ はそれぞれリッチテンソル，スカラー曲率と呼ばれ時空の曲がり具合を表わす量（計量の2階微分で表わされる），右辺のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は物質分布の持つエネルギーや運動量から定まる量です．

最も有名なアインシュタイン方程式の解は原点に質点が静止している場合のものでシュバルツシルト解と呼ばれています．シュバルツシルト解の計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mG}{rc^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2mG}{rc^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad (8)$$

で与えられます．ここで $m$ は原点にある粒子の質量です．上の計量は $r \to \infty$ でミンコフスキー計量に近づきます．すなわち質点よりずっと離れると平坦な時空に戻ります．一方，質点に近づくと次第にミンコフスキー計量からズレてきますが，$r = r_G \equiv 2mG/c^2$（$r_G$ はシュバルツシルト半径と呼ばれる）の所までくると特別な事情が起こります．すなわち $r = r_G$ の前後で $dt^2$ と $dr^2$ の前の係数の符号が変わります．シュバルツシルト半径の内側領域では $dt^2$ の前の符号が正，$dr^2$ の前の符号が負になり，このため時間空間の役割があたかも入れ替わって $t$ が空間変数，$r$ が時間変数のように振る舞うことになります．通常の時空で粒子の運動は時間が増加する方向だけに生じる訳ですが，同じ理由で $r < r_G$ の時空では粒子の運動は $r$ が小さくなる方向だけに生じます．すなわちシュバルツシルト半径の内側の領域に入った粒子は必ず $r$ が小さい方向に進み最後には $r = 0$ にある時空の特異点に落ち込んでいきます．このため $(r = r_G, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$ で定義される2次元面は粒子がいったん中に入ったらもとに戻れない一方通行の膜のような働きをします．この面はその向こう側で起きる現象を我々が決して観測できないため事象の地平線（event horizon あるいはたんにホライゾン）と呼ばれています．（図**2**参照.）

上の計量 (8) はシュバルツシルト半径の所で $dr^2$ の係数が発散しますが，時空の曲率自体は有限の大きさになっています．このためにホライゾンに粒子が到達しても粒子に働く重力の大きさは有限です．シュバルツシルト時空で曲率が発散し無限に強い重力が働くのは原点 $r = 0$ だけで，ここには質量 $m$ の押し潰された星屑が時空の特異

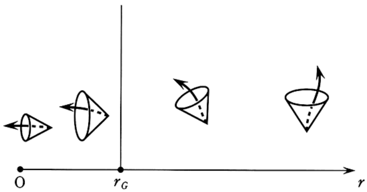



図 2　シュバルツシルト時空の光円錐の様子．$r = r_G$ より内側では光円錐は左向きに開き粒子は $r$ が小さくなる方向に運動する．

点を形成しています．このようにシュバルツシルト時空は原点にある特異点を事象の地平線が包み込む形を持ち典型的なブラックホールを表わしています．

アインシュタイン方程式は時空の構造を定める基本式と考えられ，その解を求めることに多くの努力が費やされてきました．一般にアインシュタイン方程式の厳密解は時空の特異点を含みますが，このときシュバルツシルト時空のように特異点がホライゾンに包まれている場合が物理的に意味があると考えられます．これはホライゾンに包まれていない特異点 (裸の特異点) が存在する時空では特異点付近で起きた現象が直接に無限遠方まで影響を及ぼし，一般相対論による宇宙の記述を不可能にしてしまうためです．すなわち，特異点はそこで曲率が発散するため一般相対論が破綻する所です．このため特異点付近で生じる現象に関しては一般相対論では信頼できる予言を与えることができません．このため，特異点付近の現象が我々観測者のいる遠方まで影響を与える場合には，相対論で説明できない現象に我々が現実に遭遇する可能性が出てきます．こうした危険を回避するため一般相対論では裸の特異点は存在しないものと仮定しています (宇宙検閲仮説)．

時空の特異点とは一体どんなものなのか，そこでは何が起きているのかといった問題には一般相対論は答えることができません．ミクロな空間に大量の質量が集まって極めて強い重力が働いている状態，こうした物質の極限状態はどういうものでどんな構造を持つのか．こうした問に答えるにはミクロな世界の重力理論を建設する必要があります．これが，いわゆる素粒子の超弦理論の試みです．

超弦理論でみえる時空は巨視的な時空を記述する一般相対論とはまた違ったものになると考えられます．将来，時空の最もミクロな構造が何か，この解説のタイトルにもある時間や空間のアトムは何かといった問に答えることができるようになるかもしれません．超弦理論の時空の独特の性質を第 4 節で紹介する前に，超弦理論の最近の進展，特にブラックホールのエントロピーに関する重要な発見についてふれておきましょう．

## 3. ブラックホールの熱力学

裸の特異点を持たないアインシュタイン方程式の最も一般的な解 (カー・ニューマン計量) は 3 つのパラメーター，質量 $m$，電荷 $Q$，スピン $J$ を含むことが知られています．ここで $m, Q, J$ はそれぞれブラックホールの質量，電荷，角運動量です．今，次の量を定義しましょう．(ここでは式を簡単にするために $c = G = 1$ と置いています．)

$$\begin{aligned} r_+ &= m + \sqrt{m^2 - Q^2 - (J/m)^2}, \\ A &= 4\pi(r_+^2 + (J/m)^2), \\ \omega_H &= \frac{J}{m(2mr_+ - Q^2)}, \quad \Phi_H = \frac{Qr_+}{2mr_+ - Q^2}, \\ \kappa &= \frac{r_+ - m}{r_+^2 + (J/m)^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

$r_+$ はカー・ニューマンブラックホールのホライゾンの半径，$A$ はホライゾンの面積，$\omega_H$ はホライゾンの回転の角速度，$\Phi_H$ はホライゾンの静電ポテンシャルの値，そして $\kappa$ はホライゾンでの重力加速度の大きさです．ここで，裸の特異点を排除するためパラメーターの間に不等式

$$m^2 \geq Q^2 + \left(\frac{J}{m}\right)^2 \tag{10}$$

を要求します．このとき，$r_+$ その他のパラメー

ターはすべて実（正）の値をとることがわかります．この式で等号が成り立つ所

$$m^2 = Q^2 + \left(\frac{J}{m}\right)^2 \qquad (11)$$

は，裸の特異点が現われないギリギリの所ですが，このパラメーターを持つブラックホールは限界ブラックホール（extreme black hole）と呼ばれて特別な役割を演じます．

1973年にバーディーン・カーター・ホーキングは上で定義した量の間に次のような関係が成り立つことを発見しました．

$$\delta m = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{1}{4}\delta A + \omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q. \qquad (12)$$

この関係は (9), (10) から直接導くことができます．彼らはこの関係がよく知られた熱力学の第一法則

$$\delta E = T\delta S + \omega\delta J + \Phi\delta Q \qquad (13)$$

と同じ形を持っていることに気づきました．ここで，$E$ は系の内部エネルギー，$T$ は温度，$S$ はエントロピーです．($\omega, \Phi, J, Q$ はブラックホールの場合と同じく系の角速度，電位，スピン，電荷です．）(12), (13) を比べると

$$\frac{A}{4} = S, \qquad (14)$$

$$\frac{\kappa}{2\pi} = T \qquad (15)$$

の関係があることがわかります．一方，宇宙検閲仮説を用いるとブラックホールのホライゾンの面積は時間と共に増加するといういわゆる面積定理（ホーキング）が成り立つことが知られています．

$$\delta A \geq 0. \qquad (16)$$

これは (14) を参照すると，ちょうど熱力学の第二法則

$$\delta S \geq 0 \qquad (17)$$

に対応していることがわかります．さらに，$\kappa = \sqrt{m^2 - Q^2 - (J/m)^2}/(r_+^2 + (J/m)^2)$ に注意すると

$$\text{限界ブラックホール} \leftrightarrow \text{T=0, 温度零} \qquad (18)$$

の対応があることに気づきます．このように，たいへん不思議なことですが，ブラックホールに熱力学とのアナロジーが成り立つことがわかります．

アインシュタイン方程式の解として得られたブラックホールがどうして熱力学的な性質を持つのでしょうか？ 特に (14) のようにブラックホールがホライゾン面積に比例するエントロピーを持つようにみるのはなぜでしょうか？

ブラックホールのエントロピーに関してベッケンシュタインは次のような示唆を与えました（1973年）．今，星屑がホライゾンを越えてブラックホールに落ち込むプロセスを考えましょう．星屑がホライゾンの外側にいるときには我々はこの状態を詳しく調べることによって星屑の持つ様々な量，速度，電荷，バリオン数などを情報として獲得することができます．しかし，星屑がいったんホライゾンを越えてブラックホールに落ち込んでしまうと，どのようにしても星屑の状態に関する情報を得ることはできなくなります．このためホライゾンを越えて落ち込んだ物質から成り立つブラックホールは，我々には取り出すことのできない情報をたくさんため込んでいると考えられます．物質が落ち込むたびにホライゾンの面積は増加するのでブラックホールはホライゾンの面積に比例する情報量を蓄えていることになります．熱力学では蓄えられた情報量が系の持つエントロピーを与えます．したがって，ブラックホールはホライゾン面積に比例するエントロピーを持つと推測されます．表式 $S = A/4$ をベッケンシュタイン・ホーキングの公式と呼んでいます．

上でみたように，ブラックホールは数少ない巨視的パラメーター，$m, Q, J$ でその状態が指定されています．これは気体分子の集団の熱力学的状態が圧力，温度，体積などの少数のパラメーターで指定されるのと非常によく似ています．気体分子の集団の場合にはこれを統計力学的に取り扱ってそのミクロな状態数 $W$ を計算すると，熱力学的エントロピーは公式 $S = k_B \log W$（$k_B$ はボル

ツマン定数）を用いて再現されることが知られています．ブラックホールについて同様の統計力学的な取り扱いを行ってベッケンシュタイン・ホーキングの表式を導くことができないか？ この問題は超弦理論の課題として過去20年程多くの研究者によって追求されてきました．

超弦理論はすでに30年あまりの歴史を持っていますが，ここ数年間で特に著しい進歩が起こり，これまで手が出ないと考えられてきた多くの問題に新しい手法を用いた分析が可能になってきました[1]．特にブラックホールのエントロピーに関しては，D–ブレーンと共形場の理論を用いて限界ブラックホールの量子状態の数を直接数え上げることにより，ベッケンシュタイン・ホーキングの公式を再現することに成功しました（1996年）．D–ブレーンは超弦理論のソリトンに相当するもので最近の超弦理論の発展で最も重要な役割を果たしています．現在超弦理論の分析は限界ブラックホールの場合に限られていますが，これは (18) でみたように限界ブラックホールが温度零の熱力学的状態に相当するため，そのミクロな状態数（基底状態の縮重度）が位相不変量になりその計算に特別に強力な方法が使えるためです．ブラックホールエントロピーの導出はいわば超弦理論の「実験的裏付け」ともいえ，超弦理論の研究者に大きな自信を与えました．ブラックホールのエントロピーにまつわるミステリーはその一部が超弦理論によって解かれたといってよいでしょう．

熱力学的な議論の最後に関係式 (15) についてもふれておきましょう．簡単のためシュバルツシルトブラックホールを考えると，この場合には $Q = J = 0$ なので表面加速度 $\kappa = 1/4m$．したがって熱力学的アナロジー (15) からシュバルツシルトブラックホールは温度 $T = 1/8\pi m$ を持つと予想されます．ブラックホールの温度の正確な導出には物質場を量子化し，トンネル効果によってブラックホールから放出される輻射（ホーキング輻射）のスペクトルを計算する必要があります．この計算はかなり難しいのでここでは次のような簡便法を考えましょう．今，シュバルツシルトブラックホールの計量 (8) に戻って，そのホライゾン付近の様子を調べてみます．座標 $(r, t)$ では計量が特異性を持ってしまうので次のような座標 $R$ への変換を考えましょう（簡単のため $G = c = 1$ とします）

$$dR^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} dr^2, \quad r \geq 2m. \tag{19}$$

ホライゾン付近では，$R \approx \sqrt{2m} \int_{2m}^{r} (r' - 2m)^{-1/2} dr' = 2\sqrt{2m}(r - 2m)^{1/2}$ となります．$r = 2m$ は $R = 0$ に対応します．座標 $R$ を用いて計量を書き換えると

$$\begin{aligned} ds^2 \approx & -\frac{R^2}{16m^2} dt^2 + dR^2 \\ & + 4m^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \phi^2) \end{aligned} \tag{20}$$

時間をユークリッド領域に接続，$t \to it$ すると，

$$\begin{aligned} ds^2 = & \, dR^2 + \frac{R^2}{16m^2} dt^2 \\ & + 4m^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \phi^2) \end{aligned} \tag{21}$$

を得ます．はじめの2項に注目しましょう．これは平坦な2次元平面の計量を極座標で表わした形

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\psi^2 \tag{22}$$

をしています．ここで $\psi$ は周期 $2\pi$ の角度変数です．$t/4m = \psi$ とみなすと，虚数時間 $t$ は周期 $8\pi m$ を持つことがわかります．

一方，統計力学では虚数時間に関して周期 $1/T$ を持つ系は温度 $T$ の熱平衡状態にあることが知られています．したがってシュバルツシルトブラックホールは温度 $T = 1/8\pi m$ の熱平衡状態にあることが導かれます．実際，上のユークリッド化された時空 (21) の上で場の量子論を調べることにより，シュバルツシルトブラックホールから温度 $T = 1/8\pi m$ の黒体輻射が放出されていることを示すことができます．

## 4. 超弦理論の時空

超弦理論は非常に大仕掛けな理論で数学的な構造にもたいへんに深いものがあり，その全体像は

まだまだ明らかにされていません．むしろ現在その理解が深まるにつれて超弦理論の様相自体が大きく変貌しつつあります．このため超弦理論が示唆する新しい時空像というものもまだ確立されていませんが，すでにいくつか興味深い結果が知られています．

ここでは，いわゆる弦理論のTデュアリティーと呼ばれるものを紹介することにしましょう．超弦理論は通常10次元の時空で考えます．ここではそのうちの1つの（空間）方向が周期的で半径 $R$ の円になっている場合に注目しましょう．この方向の弦の運動を考え，そのエネルギー準位を計算します．量子力学でよく知られていることですが，半径 $R$ の円周上を運動する粒子の運動量 $p$ は $1/R$ の単位で量子化されています．すなわち，$p=n/R$（$n$ は整数）です．一方，弦は長さを持つので円周の周りに巻きつくことができます．閉じた弦を考え円周に $m$ 回巻きついた場合を考えると弦の長さは $2\pi mR$ になります．このような，運動量と巻きつき数を持つ弦のエネルギーは

$$E=\sqrt{\left(\frac{n}{R}\right)^2+\left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2} \qquad (23)$$

で与えられます．ここで $\alpha'=l_s^2$, $l_s$ は弦の長さのスケールで $10^{-33}$ cm 程度の値を持ちます．((23) は次のようにして導けます．弦は単位の長さあたり $1/2\pi\alpha'$ の質量を持つので，長さ $2\pi mR$ の弦は $2\pi mR/2\pi\alpha'=mR/\alpha'$ の質量を持ちます．この弦が運動量 $p=n/R$ で運動するとき，アインシュタインの関係，エネルギー $=((\text{運動量})^2+(\text{質量})^2)^{1/2}$ を用いると (23) が得られます．)

(23) 式の特徴は，$R\to\alpha'/R$（同時に $n\to m$）の変換で弦のエネルギーが不変に留まることです．この性質をTデュアリティーと呼んでいます．Tデュアリティーのため，弦理論でみる世界ではサイズが大きいものとサイズの小さいものが同一にみえてしまうという特別な事情が生じます．通常の粒子の場合は，弦の長さからくる (23) の第2項がないのでエネルギーは空間的な大きさ $R$ に逆比例し，大きなエネルギーを注ぎ込むことによっていくらでも小さな空間スケールを調べることができると考えます．一方，弦理論では $R$ を小さくしていくと $R=l_s$ 付近で「折り返して」$R$ は増加に転じてしまい，$R$ をいくらでも小さくしていくということが不可能になります．

このTデュアリティーの現象をどう考えたらよいのか未だ確立した解釈はありません．しかしなんらかの意味で弦理論は最小の長さの存在を示唆しているように思われます．最小の長さ以下では時空は量子論的に「溶けてしまって」幾何学的な時空として記述されなくなってしまうと考えられます．

弦理論ではまた時空のトポロジーが特異性を持たずに互いに移り変わることが可能なこと，さらに，ある特定の場が存在するときには時空の座標が互いに非可換になるなどの極めて興味ある性質も知られています．このような弦理論独特の現象は，ミクロな時空の構造，特にブラックホールの特異点や宇宙創成時のビッグバン特異点などに関して今後我々の認識を大きく変えるに違いないと思われます．紙数も尽きたのでこれらの話題についてここではふれられません．興味のある読者はたとえばB. Greeneの解説書[2)]などを参照下さい．

### 参考文献


1) 超弦理論の最近の発展については，たとえば
江口　徹，“String Duality”，数学50号，岩波書店，1998年．

2) B. Greene, “The Elegant Universe”, W.W. Norton & Company, Inc., 2000年．


（えぐち・とおる，東京大学大学院理学系研究科）

# 時間反転と不可逆性



阿 部　龍 蔵

## 1. はしがき

物理学の目的の1つは，注目する物理量（あるいはそれに相当するもの）が空間座標 $x, y, z$ および時間 $t$ の関数としてどのように振る舞うかを明らかにすることである．この目的のため $x, y, z, t$ を変数とする各種の基礎方程式が利用されている．電磁気学では電場，磁場などに対するマクスウェル方程式，量子力学では波動関数に対するシュレーディンガー方程式などがその例である．マクスウェル方程式では直接観測可能な電場，磁場，電流などが従属変数として現れるが，シュレーディンガー方程式では直接的には観測が不可能な波動関数が従属変数となる．このような点で量子力学の基礎方程式は特異的な性格をもつが，時間，空間が重要な意味をもつことには変わりはない．特別な場合として，質点に対する古典力学では質点の座標そのものを時間の関数として決定することが課題となる．そのための基礎方程式はいうまでもなくニュートンの運動方程式である．ニュートンの運動方程式は時間反転に対し不変だが，自然界では多くの不可逆過程が観測されている．統計力学の立場から，時間反転と不可逆性の関係を論じるのがこの小論の目的である．

## 2. 時間反転とニュートン力学

簡単のため1個の質点に注目し，その質量を $m$，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，これに働く力を $\boldsymbol{F}$ とすれば，質点に対するニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

と表される．力 $\boldsymbol{F}$ が時間を含まない場合，時間反転 $t \to -t$ に対し，上式中の $t$ を含む部分は $t$ の2乗の形をもっているため，方程式の形は変わらない．この性質をニュートンの運動方程式は時間反転に対して不変であるとか，時間対称であるとかいう．簡単な例として，一次元調和振動子を考え，一直線（$x$ 軸）上の質点に線形復元力 $-m\omega^2 x$ が働くとすれば，運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

となる．この微分方程式の独立な解は

$$\sin\omega t, \quad \cos\omega t$$

で与えられる．時間反転に対し，$\cos\omega t$ は変わらず，$\sin\omega t$ は符号が変わる．しかし，符号の変化は新しい解をもたらすわけではなく，時間反転したものも方程式の解としての資格をもっている．

時間反転 $t \to -t$ は数学的な操作であるが，常識的には時間は過去から未来へと一方的に流れていき，その逆の流れはありえない．その事情は空間座標 $x, y, z$ と決定的に異なる．以上のような時間の非対称性はしばしば時間の矢[1]とよばれる．時間の矢のため現実に時間反転を実行するのは不可能だが，この変換をシミュレートするには次の

ようにすればよい．すなわち，ある現象の様子を8 mm ムービーかビデオに撮り，それを逆回しに写せば時間反転した映像が見られる．上述の調和振動子は永久に単振動を続けるが，この場合，映像を見ただけでは，それが順送りなのか逆送りなのか判断できない．すなわち，ビデオを逆回ししたような運動も運動方程式の解である．厳密にいえば，逆回しの映像はあくまでもシミュレーションで，現実の現象の忠実な時間反転ではない．なぜなら8 mm ムービーでは1秒間に標準的には16コマ，ビデオカメラでは30コマの割合でフィルムが送られており，実際の映像は連続的なものではなく，離散的なものだからである．無限に多いコマを無限に早く送るのは不可能なので，時間反転の映像は瞬間瞬間の映像を有限の速さで送らざるをえない．しかし，われわれの視覚は1/30秒の映像を次々と不連続的に認識するほど分解能がよいわけではないから，ビデオの逆回しは事実上時間反転の映像であるとみなせよう．

多少話が脱線するが，ビデオカメラの回転数が30 Hz であることと関連する逸話を1つ紹介しておく．ご存じのように我が国の電気の周波数は静岡県の富士川を境に東側が50 Hz，西側が60 Hz となっている．これは明治，大正の時代に数多く作られた電気会社が東側ではヨーロッパ型の発電機を，西側ではアメリカ型の発電機を輸入したためである．いまとなっては，全国を統一するのに莫大な費用がかかってしまうので現状でやむをえないと思われるが，放送関係の方々の話では関西の交流周波数60 Hz はビデオカメラのちょうど2倍なのでうまく同期し仕事がやりやすいとのことである．

## 3. 不可逆過程

現実の単振り子では，空気の抵抗とか支点における摩擦のため，その振動は理想的な単振動とはならない．例えば，上で述べた一次元調和振動子の場合，線形復元力の他に速度に比例するような抵抗力 $-2m\gamma dx/dt$ が働くと（$\gamma$ は正の定数），運動は減衰振動となる．この場合の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

で与えられるが，独立な解は

$$e^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t,\quad e^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t$$

と表される（ただし，$\omega>\gamma$ と仮定する）．周知のように，振動の振幅が指数関数的に減衰していくのが減衰振動とよばれる所以である．時間が十分経過すると振動は事実上停止してしまう．

減衰振動の様子を時間反転すると，その映像は静止していた振り子がひとりでに振動を始め，だんだんその振幅が大きくなるような運動を表す．これは奇妙な映像で現実にこのような現象が観測されることはありえない．一般に，時間反転したとき実現可能な現象を可逆過程，時間反転したとき実現不可能な現象を不可逆過程という．不可逆過程に関する法則が熱力学第二法則で，これは，熱が低温部から高温部へひとりでに移動することはない（クラウジウスの原理）とか，熱がひとりでに力学的な仕事に変わることはない（トムソンの原理）とか表現される．いずれの原理でも「ひとりでに」というのが一種のキーワードで，もっと正確には「外部になんら変化を残さないで」という意味である．2つの原理は一見したところ別々のことを述べているように思えるが，実は両者は等価である．その証明については文末の参考文献2)を参照していただきたい．

上述の「ひとりでに」という意味をもう少し詳しく見るため，熱伝導を考えてみよう．熱湯を入れたやかんを洗面器中の水にひたし放置しておくと，湯（高温部）の温度は次第に下がっていき逆に水（低温部）の温度は上がっていく．これは湯から水へと熱が伝わるためである．この現象は熱伝導とよばれ不可逆過程の典型的な例だが，熱伝導は高温 → 低温の向きにだけ起こる，いわば一方通行の現象である．しかし，このことは低温 → 高温の向きに熱が移動するのは不可能だ，という意味ではない．現にエアコンは低温部から高温部へと熱を移動させるような装置である．すなわち，

エアコンは室内から室外へと熱を移動させ，室内の温度を室外より低く保っている．しかし，そうするためにはエアコンのスイッチをオンにし，エアコンを働かさねばならない．エアコンを働かすという一種の代償を払って，熱を低温部から高温部へと移動させているのである．クラウジウスの原理は，無償で熱を低温部から高温部へ移動させるのは不可能だと述べている．

物理や化学の分野ではさまざまな不可逆過程が現れる．熱伝導，摩擦，拡散，燃焼，爆発，ジュール熱などがその例である．このような現象を扱う場合，暗になんらかの代償を払えば，時間の矢を逆向きにできると考えている．しかし，生物の現象がからんでくると，その生長，老衰，死などではそもそも時間の矢を逆転するのはまったく不可能であり，いかなる代償を払っても死者を蘇らせたり，老人を子供に戻したりはできない．このような生物と関連した現象を絶対不可逆[3]という場合がある．絶対不可逆性は，物理学，化学と生物学との間に横たわる境界を与えると思ってよいだろう．

## 4. 不可逆過程の分子論

不可逆過程は自然界における一方通行である．なぜ自然界の現象にこのような時間の矢が存在するのであろうか．これに答えるのはなかなかの難問で，19世紀後半から多くの議論があったが，その歴史を概観[4]しておこう．オーストリアの物理学者ボルツマンは，1872年，H定理というものを唱え，一応，不可逆性の説明に成功したように思えた．熱力学第二法則の1つの表現としてエントロピー増大の原理というものがあるが，H定理はこの原理と等価である．ところが，1876年ロシュミットはボルツマンの説に鋭い批判を加えた．この批判はロシュミットの可逆性パラドックスとよばれている．

すべての物質は分子や原子から構成されている．これらの分子や原子の運動を支配するのは力学の法則であるから，第2節で述べたように時間反転に対し対称である．高温物体から低温物体への熱の移動や，摩擦熱の発生なども，せんじつめれば，分子や原子の運動に基づくものである．こう考えると，自然界に不可逆過程が存在するはずがない．なぜなら，自然界における現象は，微視的に見ると，分子や原子の運動によって引き起こされ，この運動が可逆過程である以上，すべての現象も可逆になるはずだからである．しかし，現実には不可逆な現象が起こる．これは力学の法則と矛盾しないか．この批判がロシュミットの可逆性パラドックスである．

ロシュミットのパラドックスの他に，もう1つ，不可逆過程の説明に困った点がある．それは，ツェルメロが1896年に指摘した再帰パラドックスである．力学ではポアンカレの再帰定理が成り立ち，これによると質点系内の各質点が運動しているとき，ある時間が経つと最初の運動状態にいくらでも接近した状態に戻るし，さらにそれを何回も繰り返す．また，この現象をポアンカレ・サイクルという．ロシュミットの可逆性パラドックスは，時間反転に対する運動方程式の対称性により容易に理解できるが，多分，読者にとってポアンカレ・サイクルはなじみの薄い概念であろう．定理の詳しい証明は参考文献5)を見ていただくこととし，ここでは簡単な例を考え，基本的なポイントを押さえておこう．

第2節で述べたような一次元調和振動子が $N$ 個あり，振動子の間には相互作用は働かないとする．すなわち，各振動子は独立な運動を行うと仮定する．これらの振動子の周期をそれぞれ $T_1, T_2, \cdots, T_N$ とすれば，$i$ 番目の振動子の座標 $x_i$ は，振幅を $A_i$，初期位相を $\alpha_i$ として

$$x_i = A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}\,t + \alpha_i\right)$$

と表される．特別な場合として，これらの周期がすべて同じ $T$ であるとすれば，どんな初期状態から出発しても，時間が $T, 2T, 3T, \cdots$ だけ経過すればすべての振動子は最初の状態に戻り，ポアンカレの定理が成り立つ．また，3個の振動子を考え適当な時間の単位を選んだとき，振動子の周期

が 3, 5, 7 であるとしよう．この場合には，時間がこれらの最小公倍数 105 だけ経過すれば，振動子の状態は元に戻る．

一般に，振動子の周期が整数のとき，その最小公倍数（およびその整数倍）だけ時間が経てばすべての振動子は初期の状態に戻る．次に，振動子の周期が有理数の場合を考えてみよう．このとき，$1/T_i$ を既約分数の形で表し，これらを

$$\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \cdots, \frac{N_N}{D_N}$$

と書く．分母の最小公倍数を $M$ とすれば，時間が $M$ だけ経ったときすべての振動子が最初の状態に戻るのは確かである．しかし，ポアンカレ・サイクルの周期として必ずしも最小ではなく，最小値を求めるには，上述の分子の最大公約数を $M'$ としたとき，さらに $M'$ で割る必要がある．すなわち，ポアンカレ・サイクルの周期は $M/M'$ で与えられ，この場合にも同定理が成立することは明らかである．

振動子の周期が無理数だと，そもそも無理数には最小公倍数とか最大公約数といった概念が適用できないからこれまでの議論は通用しない．しかし，無理数はいくらでも正確に有理数で表され，これまでの議論を繰り返すと，ある時間が経つと最初の運動状態にいくらでも接近した状態に戻り，ポアンカレの定理が成り立つことになる．このように，不可逆過程の議論では，有理数，無理数といった物理の立場ではどうでもよい差がそれなりの意味をもってくる．第 6 節でも似たような事情に遭遇するであろう．

さて，ポアンカレ・サイクルは，不可逆過程の説明にとってはなはだ具合が悪い．例えば，気体を自由膨張させたとき，ポアンカレ・サイクルの周期だけ時間が経過すると，気体は元の状態とほとんど同じ状態に戻るわけで，これは不可逆過程の存在を否定する．それでは，一体，不可逆過程というものをどう考えたらよいのだろう．

ボルツマンは次のような例を考え，ポアンカレ・サイクルの周期を評価した．いま，$1\,\mathrm{cm}^3$ の気体中に $10^{18}$ 個の分子があり，初期には互いに $10^{-6}\,\mathrm{cm}$ 程度離れているとし，各分子に $500\,\mathrm{m/s}$ の速さをでたらめな方向に与えたとする．位置は $10^{-7}\,\mathrm{cm}$ 以内，速さは $1\,\mathrm{m/s}$ 以内に戻る時間を評価して $10^{10^{19}}$ 秒程度の値を得た．$10^{19}$ という数は非常に大きいが，なんとそれがまた 10 の肩に乗っているのである．

宇宙の歴史は，いまから約 150 億年前のビッグバンによって始まったという考えが，現在では広く受け入れられている．上述のポアンカレ・サイクルの周期は，これに比べ圧倒的に長い．したがって，事実上，ポアンカレ・サイクルの周期は無限大と考えてよい．このため，本来なら可逆過程である力学的な現象が，実際上は，一方的に進行するように見えるのである．その際，本質的な点は，物体が非常に多数の原子・分子から構成されているということである．ある体系が多数の粒子から構成されているとき，数密度（単位体積当たりの粒子数）を一定に保ちその体積を無限大にする極限をとり，これを熱力学的極限という．通常，物性物理学ではこのような極限をとり，各種の物理量が求められる．この極限でポアンカレ・サイクルの周期は無限大になると考えられるので，分子論的な立場から不可逆過程を議論することが可能となる．例えば，電気伝導率に対する久保公式[6)]を導くとき，力学の法則（古典力学でも量子力学でもよい）と平衡系の統計力学を利用するが，それでいて電気伝導率のような不可逆過程に付随した物理量が議論できるのは暗にポアンカレ・サイクルの周期を無限大としているためである．

## 5. エルゴード仮説

力学の時間対称性と不可逆過程をどう両立させるか，あるいは物質が多数の分子や原子から構成されるという観点から時間の矢をどう理解するか，といった疑問への挑戦のうちから分子運動論，統計力学などが発展してきた．H 定理の前年，1871 年にボルツマンは位相空間を導入し，時間平均と集団平均が等しいという意味でのエルゴード仮説を導入した．ちなみにエルゴードという用語は，

ギリシア語でエネルギーを表すエルグと道を表すオドスとの合成語である．

上記の平均が等しいという仮説は，簡単な例でいうと次のようになる．いま，あるサイコロを振ったとき，1の目が出る確率を考えてみよう．これには2つの考え方がある．1つは，そのサイコロを何回も振り，1の目が出る回数を求めることである．サイコロに問題がなければ，1万回振ったとき1の目が出る回数は1/6の1667回程度になるはずである．このようにして確率を求めるのは時間平均をとることに相当する．もう1つは注目するサイコロと寸分違わぬ，例えば1万個のサイコロをいっせいに振り，1の目が出ている個数を調べる方法である．この個数は1667個程度になるはずで，いまの操作は集団平均をとることに対応する．このような簡単な例では，時間平均 = 集団平均という結果はむしろ当然であるといえる．

エルゴード仮説はしばしば異なった形で登場する．著者が初めてエルゴードという言葉に出会ったのはほぼ半世紀前，旧制高校の学生のころ，朝永先生の量子力学の教科書[7]を勉強したときのことであった．この教科書は量子力学だけでなく，統計力学の基礎ともいうべきエルゴード仮定も解説しているという点で大変教育的である．もっともこの著書ではエルゴード仮定という言葉が使われたが，現在ではエルゴード仮説という用語[8]に統一されている．以下，朝永先生の本にあるのと同じような意味でのエルゴード仮説について述べていく．

$N$ 個の内部自由度をもたない同種の粒子がある容器の中で運動しているとし，粒子の質量を $m$，$i$ 番目の粒子の運動量，位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{r}_i$，粒子間のポテンシャルを $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ とする．全系のハミルトニアン $H$ は

$$H = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

と表される．全系の運動を記述するには，全粒子の座標，運動量成分を直交座標とするような $6N$ 次元空間を導入するのが便利でこれを $\Gamma$ 空間という．この空間中の1点（代表点）を指定すれば，体系の運動状態を一時に指定したことになる．この代表点は時間が経つにつれ，力学の法則（ハミルトンの正準方程式）

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

に従って軌道を描いていく．体系が外部とエネルギーのやりとりをしなければ，力学的エネルギーは保存され，代表点は等エネルギー面 $H = E$ の上を運動する．ここで，$E$ は体系の力学的エネルギーで定数であるが，等エネルギー面は $\Gamma$ 空間中の1つの超曲面を表す．

代表点は等エネルギー面上で複雑な運動をするが，朝永先生の言葉を借りると，それはおそらく等エネルギー面のどんなところにもうねうねともれなく侵入していくであろう．そこで，代表点の軌道は等エネルギー面の上をあき間なく全面的にへめぐっていくと仮定する．この仮定がエルゴード仮説である．エルゴード仮説は，平衡系の統計力学の原理を導くために重要な役割を演じる．

ところで，力学的エネルギー保存則以外になんらかの保存則が成り立つとこれも $\Gamma$ 空間中の超曲面を与え，代表点は2つの超曲面の交線上を運動する．多次元の空間を図示するのは不可能だが，以上の状況の概念図を図1に示した．代表点の運動は，1つの閉曲線（実際は $6N-2$ 次元の空間）の上だけに限られ，このため等エネルギー面全体に及ぶわけではない．すなわち，エルゴード仮説

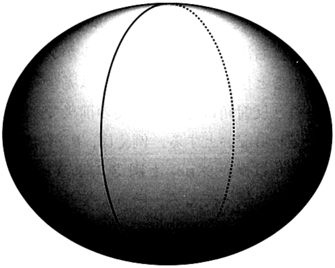


図1　等エネルギー面上の軌道（概念図）．

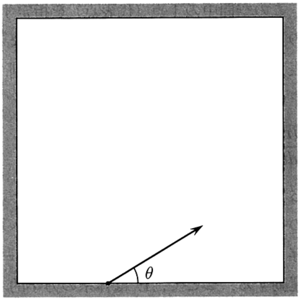


図2　ワイルの撞球.

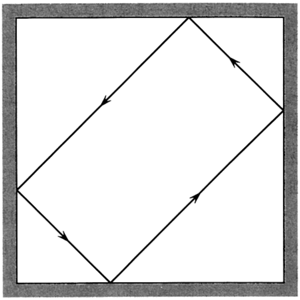


図3　$\theta = 45°$ の場合.

は成立しない．通常，保存則は運動の定数を与え力学の問題を解くのに有効に利用されるが，皮肉なことに統計力学に関する限り，出世の妨げともいえる存在である．

## 6. ワイルの撞球

朝永先生の著書には，エルゴード仮説の説明箇所に脚注があり「数学者に言わせるとここにやかましい問題が存在するのであるが，そういう議論にはここで立入らない」と記されている．先生のコメントに全面的に賛成であるが，初学者に統計力学の講義をするとき，わかりやすくて多少説得力のある議論が望ましい．そのような意図にマッチすると思えるのが，数学者のワイルが提唱した以下のような撞球である[9)]．

正方形のビリヤード台があるとし，その1辺の1点から図2に示すようにボールを辺と $\theta$ のなす方向に打ち出したとする．ボールがクッションと衝突すると反射されるが，それは完全弾性衝突で入射角と反射角は等しく衝突の前後でボールの速さは変わらないとする．例えば，$\theta$ が $45°$ の場合，ボールはクッションと図3のように衝突し，再び出発点に戻ってくる．そうしてこの後は，同じ運動を繰り返し，ビリヤード台を埋め尽くすことはない．すなわち，エルゴード仮説は成立しない．一般に $\tan\theta$ が有理数のとき，ボールは何回かクッションと衝突した後再び出発点に戻ってきて，その後は同じ運動を繰り返すのでエルゴード仮説は成立しない．

しかし，$\tan\theta$ が無理数の場合には，ボールは元の場所に決して戻らず，しかも，ビリヤード台を埋め尽くすことが証明される．という次第でこの場合にはエルゴード仮説が成立することとなる．$\theta$ が $30°$ だと $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ となり，これは無理数であるからエルゴード仮説が成り立つはずである．この場合，現れる角度は $30°$ と $60°$ だけであるから，三角定規を使って作図が可能である．興味ある読者は，ご自分で作図をされたらどうだろう．著者が放送大学に赴任したとき，放送用の教材の CG を作ってくださるとのことだったので，統計力学関係の講義の資料としてこの映像を準備してもらった．平成6年度からそのような画像が現在にいたるまで放映され，さらに平成14年度まで放映される「エネルギーと熱」という科目の第9回目の講義でその映像が流れる予定である．

有理数の集合は可算的で，番号をつけられるような集合である．可付番集合といった用語も使われる．有理数が可算濃度をもつのに対し，無理数の集合は連続体濃度をもち有理数よりはるかに稠密である．無理数は文字通り数え切れないほど多数あり，有理数に比べ圧倒的に多い．ワイルの撞球で角 $\theta$ をランダムに変えたとき，ほとんどすべての場合にエルゴード仮説が成り立つ結果となる．

エルゴード性が，以上のような集合の性質と関係しているとは，世の中面白いというべきであろうか．

### 参考文献


1) 松田卓也：科学朝日 9 月号 (1995) 28, なおこの原稿は http://nova.earth.s.kobe-u.ac.jp/matsuda/review/time.html のアドレスを利用すればインターネットでアクセス可能である．
2) 小出昭一郎，兵藤申一，阿部龍蔵：物理概論上巻（裳華房，1983）．
3) 坂井卓三：熱学の理論 1 熱力学の基礎（誠文堂新光社，1947）．
4) 阿部龍蔵，今井勇：研究物理 I（旺文社，1973）．
5) 中野藤生，服部眞澄：エルゴード性とは何か（丸善，1994）．
6) R. Kubo: *J. Phys. Soc. Japan* **12** (1957) 570.
7) 朝永振一郎：量子力学（1）（東西出版社，1949）．
8) 文部省「学術用語集」物理学編（増訂版）（培風館，1990）．
9) 伏見康治編：量子統計力学（共立出版，1967）．



（あべ・りゅうぞう，放送大学教養学部）

# 生物の時間



本川　達雄

## 1. はじめに

そもそも私が生物の時間ということを考え始めた経緯から述べたい．私は沖縄に長いこと住んでいたのだが，沖縄移住の最初の日の経験がそのきっかけだった．

東京から着いた日，さっそく歓迎会があった．夜の7時半にということで，教えられた店にいったのだが，誰もいない．一人で待っていると，8時過ぎにぽちぽち人が集まりだし，予定を1時間あまりすぎて，ようやく会が始まった．

始まりは遅いのだが，終わるのも遅い．いったん飲み始めると，泡盛を酌み交わしながら，えんえんと会は続く．南国の時間のゆったりとした流れにびっくりさせられた．あとで聞いた話なのだが，7時半に始まるというのは，その頃に家を出ることらしい．時間のルールや流れ方が，ずいぶんと違うのである．

赴任した大学は，小さな海洋生物の研究所を小さな島にもっていた．私は海の動物を研究対象としており，歓迎会の翌日，さっそくその島まで行ってみた．着いたのはちょうど潮の引いている時刻だったのだが，驚いた．ナマコだらけなのである．波打ち際にナマコがごろごろしている．近づいても逃げない．

ふつう動物は，敵が近づけば逃げるものだし，逃げ足の遅いものは隠れている．そうしなければ，たちまち敵に食われてしまうからだ．ところがナマコは，けっこう大きな目立つ体を，堂々と強い南国の日差しにさらしている．これはおかしい．こんなことをしていて，それでも食われず，かえって足の踏み場もないくらいたくさんいる．これには何か秘密があるに違いない．こんな疑問がナマコの研究に深入りするきっかけとなった．

それにしてもナマコは動かない．あまりに動かないものだから，手始めに，いったいどれくらい動くものか，一日中ナマコの行動を見ていることにした．夜も水中ライトをもって潜って見る．観察したのはシカクナマコという体長15 cmほどの黒いナマコだが，これが動くのは昼間だけ．動くといっても丸一日で20メートル程度だった．

水にぽかーっと浮きながら一日中ナマコを眺めていると，不思議な気分になってくるものである．こんなに動かないナマコに，われわれと同じ時間が流れているのだろうか？

人間は寝ている間にも，寝返りをうってけっこう動いている．でも，ナマコは起きている間だって，こんなにも動かない．われわれのせかせかした生活の時間とナマコの時間とは，もしかしたら違うものではないだろうか．そして沖縄というこの島にも，大和とは違う独自の時間が流れているのではないか．いったい時間って何だろう？ 水に浮きながらぽけーっとナマコを眺めていると，こういう根元的な疑問が浮かんでくるのであった．

## 2. 動物の時間

そこで「時間生物学」と名のつく本をいくつか読んでみた．そこに書いてあるのは概日リズムのことばかり．生物には一日周期の活動のリズムがあり，これを概日リズムと呼ぶ．リズムの中枢は鳥や哺乳類では脳にあり，時計として働く遺伝子が，ショウジョウバエではみつかっている，ということが書いてあった．

地球は一日に一回転する．それにともない，光も温度も湿度も，その他もろもろの環境要因も変化する．生物とは環境に適応しているものなのだから，環境の変化と同調したリズムを生物が示すのは当然のことだろう．バクテリアもショウジョウバエも私たちも，皆，同じ時計を体内に遺伝子としてもっており，それが天体の時間と同調しているならば，時間は万物共通でめでたしめでたし．科学は普遍をめざすものだから，普遍的な時間を生体内に求めるのが，時間生物学研究の主流になっているのは，当然といえば当然だろう．

しかし私の知りたかったのは，ちょっと違う．万物共通の一日という物理的時間が，それぞれの生きものにとって，はたして同じ「重み」をもったものなのだろうか，という問いであり，それには「時間生物学」はさっぱり答えてくれないのだった．

ところが，まったく違った方面から，この疑問に答えてくれそうな文献がみつかった．私は以前から，動物の体の大きさが，さまざまな面に影響をおよぼすことに興味を抱いていたのだが，その関係から面白い論文に出会ったのである．心臓の1回の拍動に要する時間を，いろいろな哺乳類で計って比べたものである[1]．

心臓はかなり規則正しく打っており，われわれヒトの場合は1分間に60～70回である．つまり心周期は約1秒．しかしハツカネズミのように小さなものだと1分間に600回も打つ．心周期は0.1秒と短い．もうちょっと大きいドブネズミだと0.2秒．ネコは0.3秒，ウマは2秒，ゾウでは3秒というように，体が大きいものほど心臓はゆっくり打ち，周期が長くなるのである．

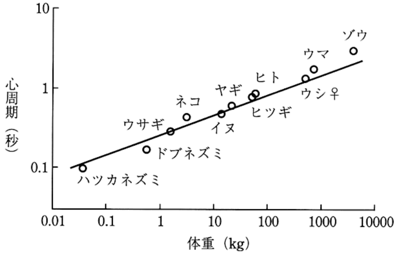



**図 1**　心周期と体重の関係（哺乳類）．

体重と周期の関係を両対数グラフで表すとほぼ直線になる（図 1）．だから心周期は体重のベキ乗で近似できる．

$$T_c = 0.25\,M^{0.25}$$

（$T_c$ は心周期，単位は秒，M は体重，単位は kg）．

同様に呼吸の周期（$T_p$）を計ると，やはり両対数グラフでほぼ直線となり，次の近似式が得られる．

$$T_p = 1.12\,M^{0.26}.$$

寿命（$T_{LS}$）というものも，世代交代と関連した一種の周期であろう．これも両対数グラフで有意な近似直線が引け，次の式となる．

$$T_{LS} = 3.66 \times 10^8\,M^{0.20}.$$

これらはすべて，体重のほぼ1/4乗に比例しているわけだから，周期同士を互いに割れば，無次元の定数が得られる．たとえば，

$$\frac{T_p}{T_c} \fallingdotseq 4.5,$$
$$\frac{T_{LS}}{T_c} \fallingdotseq 1.46 \times 10^9,$$
$$\frac{T_{LS}}{T_p} \fallingdotseq 3.27 \times 10^8.$$

つまり，ゾウであれネズミであれ，一呼吸する間に心臓は4.5回打ち，心臓が約15億回打てば寿命となるというわけである．時計の時間でみればゾウは50～70年の寿命であり，2～3年のハツカネズミより，桁違いに寿命は長い．しかし，「心臓時

計」で計ればどちらも同じということになる．もし「肺時計」で計るならば，3億回の呼吸で，みな死を迎えることになる．

このような動物の時間に関する広範なデータは，コールダーのサイズに関する本[2)]の中にまとめて出版された．それを見ると，非常に多くのケースで時間は体重の 1/4 乗にほぼ比例している．たとえば腸が蠕動する時間，血液が体内を一巡する時間，懐胎期間，成獣の大きさに達するまでの時間，等々．

寿命についても，個体の寿命に限らず，細胞の寿命やタンパク質の寿命（半減期）も，やはり同様である．

ただし 1/4 乗といっても，かなりばらついたデータから回帰直線を引いて得られたものであり，例外もそれなりにあるのは，生物を扱う場合の通例のこと（とくに寿命に関してはばらつきが大きい）．しかし，これだけ多くの例で時間が体重の関数で表せるわけだから，動物が関わってくると，動物ごとに，その動物の時間を考えねばならないのは，確かだと思われる．

以上は鳥と哺乳類，つまり体温が一定の恒温動物で得られた結果である．恒温動物に限っていえば，「動物の時間は体重の 1/4 乗にほぼ比例する」と一般化できると思われる．

## 3. エネルギー消費率と時間

なぜ時間が体重の 1/4 乗に比例するのかについて学界の定説はないが，私はエネルギー消費率がこれに関係していると考えている．

いろいろな大きさの恒温動物がどのくらいエネルギーを使うかを図2に示した．図の横軸は体重，縦軸 E は体重 1 kg あたりのエネルギー消費率（単位はワット）である．これも両対数グラフで直線となり，次の近似式が得られる[3)]．

$$E = 4.1\,M^{-0.25}.$$

生きた組織がエネルギーを使う．ゾウはエネルギーをたくさん使うのだけれど，これは組織の量が多いから．同じ組織量あたり（たとえば体重 1 kg

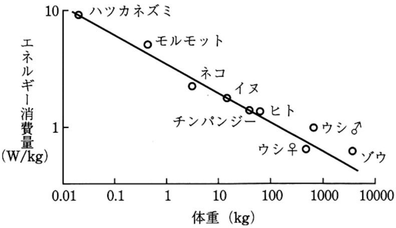



図2　比代謝率（体重 1 kg あたりの代謝率）と体重の関係（哺乳類）．

あたり）で比べれば，ゾウであれネズミであれ，使うエネルギー量は変わらないと思われる．ところがそうではない．体重あたりのエネルギー消費率は体重の −1/4 乗に比例し，大きいものほど体の割にはエネルギーを使わないのである．

エネルギー消費率は体重の −1/4 乗に比例し，一方，時間は体重の 1/4 乗に比例する．だから結局「時間とエネルギー消費率とは反比例する」し，「時間 × エネルギー消費率 ＝ 一定値」となる．

たとえばエネルギー消費率に心臓が 1 回打つ時間を掛けると，1 ジュールという体重にはよらない一定値となる．また，エネルギー消費率に寿命という時間を掛けると 15 億ジュール．ゾウもネズミも体重あたりにすれば，一生に使うエネルギー量は同じなのである．

だから話は非常に単純になる．哺乳類はどれも同じつくりの機械とみなすことができるわけだ．一回転に使うエネルギーは同じで，15 億回まわれば壊れる．早く回せば回すほど早くガタがくるし，ゆっくり回せば長持ちはするのだが，壊れるまでになす仕事は，回転速度によらず同じ．

ネズミはすべてにおいてペースが早い．心臓は早く打ち，早く成熟して子供をつくり，早く死ぬ．生きていくペースを動物の時間の速度とするなら，小さいものは時間が早い．時間は動物により違うのである．

別の見方もできるだろう．時間は同じ速度であるが，その同じ時間内にネズミはゾウよりずっとたくさんの仕事をしているのだから，時間の「密

度」が高いともいえる．

時計の時間は，速度は一定で，質の違いもない．だから時計によって一生という時間を見れば，長いか短いかでしか比べられないのだが，生物の時間には速さや質の違いがある．ネズミの時間は密度が高く，その一生はものすごく濃密なもの．単純にゾウの時間と長さだけで比べられるものではない．

## 4. 代謝時間

動物ではエネルギー消費率と時間とが反比例する．時間の逆数は「時間の速度」とみなせるだろうから，時間の速度がエネルギー消費率に比例することになる．動物の体内ではエネルギーを使えば使うほど時間は速く進んでいく．

このような時間のとらえ方は，生きていくペースをエネルギー消費率で表し，そのペースを時間の速度と考えるものである．エネルギーを使うとは仕事をすること．短い物理的時間の間にたくさん仕事をすれば，生きているペースが速く，それを時間が速いと考えるわけである．

エネルギーをたくさん使えば，たくさん食べ，酸素もたくさん必要になる．動物は食物を酸素で「燃やして」エネルギーを得ているからである．酸素をどんどん運ぶために，肺はせっせと呼吸し，心臓も早く打って血液を送らねばならない．腸もすばやく蠕動して食物を消化する必要がある．心臓も肺も腸の動きも，すべてエネルギーを使用するペースと連動しているわけで，「心臓時計」や「肺時計」がエネルギー消費率と関係するのは当然といえば当然なのである．

生物のエネルギー消費率は代謝率と呼ばれる．ここで考えてきた時間とは，代謝率を時間の速度とするものであるため，このような時間を「代謝時間」と私は呼ぶことにした[4)]．

## 5. サイズ依存性の由来

動物の代謝率は（体重あたりにすると）体重の −1/4 乗に比例する．個体あたりにすれば 3/4 乗に比例する．代謝時間がなぜ体重の 1/4 乗に比例するのかという疑問は，なぜエネルギー消費率が体重の 3/4 乗に比例するのか，という疑問に帰着する．じつはこれは 100 年来の大問題なのである．

研究の揺籃期には 0.7 前後というベキ乗の数値が得られていたため，これを 2/3 だとみなし，代謝率は表面積に比例すると解釈された．当時のデータは哺乳類，つまり体温が高く一定の動物に限られていた．そこで体温を維持するのにエネルギーの大半を使っていると考えると，エネルギー消費率は体から逃げ出る熱の量に比例し，これは体表面積に比例することになる．こう考えて皆が納得していたのだが，研究がすすむにつれ，ベキの指数は 0.75 であり，恒温動物のデータに対して 2/3 は統計的に有意に違いがあるという結論になった．また，3/4 乗則は恒温動物のみではなく，変温動物においても成り立つことがわかり，恒温性にもとづいて単純に表面からの熱の出入りで説明をつけるわけにはいかなくなった．

ただし，表面積仮説はその後も繰り返し現れている．表面積は生物にとってきわめて重要な意味をもつものだからである．エネルギーも物質も情報も，すべて表面を経て体内に取り込まれる．不要になったものも表面を通して排出される．0.75 という数字が 2/3 にきわめて近いのは，表面積依存性のものが主に効いているからで，それに何らかの要因が加わってこの数字になっているのだ，という考えは根強い．

**3/4 乗アーテファクト説**：これはあくまで 2/3 乗が正しいという強硬派の説である．3/4 という数値は，一つの動物の種で測定して種内の平均値をとり，また別のサイズの違った種で平均値をとり，そのようにして集めた平均値を両対数グラフにプロットして回帰直線を引いて得られた間接的な値である．本当は同一種内では 2/3 乗に比例しているのだが，その平均値をつなぐと 3/4 という数字がアーテファクトとして出てきてしまうのだという考えがある．賛同者のほとんどないものだ

が，同一種内では2/3と3/4とを実測値から区別することは困難なため（体重の範囲が狭いから），可能性を否定はできない説ではある．

**4次元表面積仮説**[5)]：2/3とは3次元物体の表面積なのだが，4次元物体なら表面積は3/4になる．だから動物にはもう一つの秘められた次元があるかもしれないから探してみようではないかという提案．

**弾性相似仮説**[6)]：表面積とは無関係に，力学的な考察から3/4を導く仮説もある．陸上脊椎動物の骨格系は，弾性的な柱と梁が組み合わさってできた骨組み構造とみなすことができる．柱が自重で座屈せず，また梁のたわみが一定の割合に保たれるためには，幾何学的相似ではだめで，直径は長さの3/2乗に比例しなければならない．このような相似を弾性相似と呼ぶ．弾性相似なら，梁の断面積は質量の3/4乗に比例する．さて，同一種類の筋肉についていえば，単位断面積あたりの力はほぼ一定，収縮速度もほぼ一定であることが知られている．つまり筋収縮においては単位断面積あたりの仕事率は一定になる．だから，体のエネルギーのほとんどが筋収縮に使われるとするなら，エネルギー消費率は断面積に比例し，結局3/4乗に比例することになる．

この仮説はじつにすっきりしており，発表当時は拍手喝采を浴びた．しかしその後，弾性相似が成り立つ例の少ないことがわかり，今では支持されていない．これは陸上脊椎動物に限定された仮説である．

代謝速度が3/4乗になるのだが，代謝速度は食物や酸素の供給が律速になると考えるのは自然であり，以下のものはこの考えに立った仮説である．

**探餌仮説**[7)]：陸上哺乳類は行動圏の中をうろついて餌をあさる．行動圏の広さや歩く速度は体重のベキ乗で近似でき，実測値がある．餌が再度利用可能になるまでの時間などをも，いくつかの仮定をおいて体重のベキ乗で表して，これらの組み合わせから3/4という数字を導こうと試みたものがこの仮説である．しかし非常に複雑で仮定も多く支持者は少ない．これも陸上哺乳類に限られたものである．

**質量伝達仮説**[8)]：水性生物に限った仮説もある．水中では，酸素をはじめ必要な物質は，境界層を拡散して生物に手渡される．伝達される量にはシャーウッド数とレイノルズ数という二つの無次元数が関係するが，これらをもとに3/4を出そうという試み．一種の表面積仮説である．

**フラクタル仮説**[9, 10)]：これは体内で物質を運んでいく輸送系のネットワーク（具体的には血管系）がどういう設計になっているかから考える仮説．

血管系は以下の三つの設計原理のもとにつくられていると仮定する．1) 中心からだんだん枝分かれして細くなっていって体全体を枝分かれで覆う．2) 最末端の枝は動物のサイズによらず一定の太さである．3) 輸送にかかるエネルギーを最小にする．

このように仮定すると，枝分かれはフラクタルになり，血流の速度が体重の3/4乗に比例するという結果を導くことができる．これはロスアラモスとサンタフェの人たちが発表したもので，複雑系との関連で現在注目を浴びている．ただしこの説のような特別の枝分かれ原理をもち込まなくても，効率的な輸送ネットワークを考えるだけで十分だという議論も出されている[11)]．

## 6. 実験的サイズの生物学

サイズの生物学で，いつも気になることなのだが，一方にあるのは，ハチドリやらゾウやら，さまざまな動物から研究者が体を張って計って得た経験的なデータの山，他方にあるのは，非常に抽象的な数理モデル．この二つは論文そのものも異質だし，それを書いた人たちもまったく異質で，さっぱり統合されていない印象を受けてしまう．

サイズの生物学には百年を超す歴史があり，かつ3/4乗則は，単細胞生物からわれわれ哺乳類ま

で，非常に幅広くあてはまる普遍的な現象である．にもかかわらず，長いあいだ生物学の主流から無視されてきた．これは実験的手法が使えなかったからだと私は考えている．単なる経験的なデータの山では，科学とは呼ばれない．また，解釈だけでそれを検証する実験を伴えない理論は，やはり単なるお話にすぎないだろう．

ゾウを切り刻んでミニチュアのゾウをつくることができれば，同一種で純粋にサイズの効果のみを調べられる．また，仮説の大部分で代謝率は形の次元に依存するから，ゾウを引き延ばして平らな 2 次元ゾウをつくることができれば，仮説の検証が可能となる．サイズや形を実験的に操作できないだろうか？

沖縄の海で潜りながら，こういうことを夢想していたのだが，ある日，妙案を思いついた．沖縄の海にはサンゴがいる．サンゴの一個体であるポリプは，自分の体を二つに分割したり体の一部から芽をだしたりして，まわりに自分とそっくりのポリプをどんどんつくり，全体として大きな群体になる．群体は同じ親から無性生殖によって生み出されたものだから，すべてクローンで，形も大きさも同じ．また，群体内の隣り合った個体は体の一部がつながっており，群体全体として協調した行動を示す．群体を割って小さくしてもちゃんと生きているし，クローン群体同士を接触させておけば，癒合して大きなものになる．だからサイズの人為的操作ができるのである．また，サンゴには平面状の群体も 3 次元の群体もある．群体性の動物を使えば，サイズの生物学で実験が可能になるはずだ！

もちろん，今まで議論されてきたのは個体性をもつ動物におけるサイズの効果であった．しかし，動物はほぼ同じ大きさの細胞が集まってできているものであり，モジュールからなるシステムにおけるサイズの効果，ということで考えるなら，今までの仮説は個体性のものと群体性の動物とを区別しない．だから群体はサイズの生物学のモデルとなる資格を備えている．さらに欲張ったことを考えるなら，群体は個体の集まったシステムであるから，企業など，人間社会を対象としたサイズ効果のモデルとして使えるかもしれない．生物学を越えたシステム論の実験モデルとして，大いなる可能性を秘めているわけである．

ということで実験を始めたのだが，すぐにめげた．サンゴの体には，藻類をはじめやたらにたくさん別の生きものが住み込んでいるのである．これらの影響が大きく，実験系として使いものにならない．

東京に移ったのを機に，実験材料として群体性のホヤを使うことにした．食用にするマボヤならおなじみであろう．これは一匹で独立して生活している単体性のものだが，ホヤには群体性のものもいる．群体ホヤの研究では伊豆の下田にある筑波大学の研究所に長い伝統がある．その下田のシモダイタボヤは，一個体（個虫）が米粒大で，サンゴ同様出芽により個虫を増やし，名前からわかるように一層の板状に広がる 2 次元の形の群体をつくる．サンゴと違い体内には他の生物は住み込んでいないし，硬い骨格をもたないので容易に群体を分割できるところがよい．個虫間には血管のつながりがあり，協調的な行動を示す．

筑波大学の斉藤康典先生にご指導を受けながら，このホヤで群体のサイズとエネルギー消費率の関係を調べてみた（以下の仕事は大学院生の仲矢史雄が中心となって行ったものである）．エネルギー消費率は群体の重量の 0.80 乗に比例していた．これは 0.75 と統計的に区別できない値であるが，0.67 とは有意に違う[12]．

群体を切って小さな群体にしたり，癒合させて大きい群体をつくったりすることができた．分割すると，群体中の個虫一個あたりのエネルギー消費率は上がる．癒合すると，個虫一個のエネルギー消費率は下がる．個虫は群体のサイズに応じてエネルギー消費率を変えた．サイズとエネルギー消費率の関係から予測されるものへと変化したのである．

イタボヤ群体は 2 次元の形であり，質量伝達説やフラクタル説なら 3 次元とは違うベキの数字になるはずなのだが，やはり 3/4 という結果になっ

た．骨格系をもたない海産のホヤには，陸上哺乳類の採餌説や弾性相似説もあてはまらないから，この結果は今までのどの仮説も支持しない．

個体性の動物と，群体性のものとは，本来，違うものだからこうなるという解釈もあるだろうし，ホヤなどは特殊な例外，と一言で片づけられてしまう恐れもある．そこで，なんとかホヤを念頭においた一般的なモデルを考えてみようと試みた．群体ボヤは同じ要素からできており，おのおのの要素はまわりの要素から局所的な影響を受けているものとみなせるだろう．これはセルオートマトンそっくりであるため，今，セルオートマトンの活動度と格子サイズの関係を調べているが（中央大学の木崎伸也氏との共同研究），中央集権的なネットワークが存在しなくても，局所的な要素の相互作用だけでベキ乗のサイズ依存性が現れるという結果が得られており[13)]，これは今までとはひと味違った仮説がたてられそうだと期待している．

## 7. 時間の重層性

再び時間の話に戻ろう．

恋人と一緒の時間とつまらない会議の時間など，同じ１時間でも長さが同じとは感じられないし，歳をとれば１年は早い．時間が一様でないことは，われわれ皆が経験的に知っていることである．ところが改まって時間とは何かと問われると，時計で計るものと答えてしまうのが現実であろう．

そうなってしまうのは，私たちの自然観が古典物理学にもとづいているからである．古典物理学は絶対空間，絶対時間というがっちりとして変わることのない枠組みに支えられており，時間といえば絶対時間一種類しかない．

もう一つ，時計の時間がこれほどまでに好まれる理由は，それが数字で表せるからである．はっきりと数字で示せないものは，今の世の中ではなかなか公には認められにくい．恋人といるときの時間が早いのか遅いのか，数値で表すことは難しく，それゆえあやふやなものとして，こういう心理的な時間は認められにくい．何でも数字にしてしまい，それができないものは存在を認めようとしない現代社会の傾向も，やはり物理学の影響によるものであり，起源はガリレオまでさかのぼれる．

日常生活において時間という言葉を，私たちはずいぶんといろいろな意味で使っている．大まかに分ければ，物理的な時計の時間，生物的な体の時間，心理的な時間，社会活動の時間の四つになるかもしれない．この中で計って数値化できるのは物理的時間だけである．だからこそ改まって「時間とは？」と問われると「時計で計るもの」と答えることになってしまうのだろう．

しかし，それはわれわれが時間という言葉で意味しているもののごく一部でしかない．生物には生物特有の生きるペースがあり，これも時間としてわれわれは感じているはずである．それをなんとか数値化して，この数字万能主義の世の中において，時間として扱えるようにしようと試みたのが代謝時間の考えである．

代謝時間の考え方は，社会生活の時間にも適用できると私は考えている．

新聞を広げれば，でかでかと車，コンピュータ，携帯電話，航空会社の広告．これらは皆，使うと早くものごとを処理できるものたちである．早く行き，早く計算し，早く情報を伝える．これらの機器を使うことにより，時間を早めることができるのである．もちろんこういう機器類は，作るにせよ動かすにせよ，膨大なエネルギーがいる．われわれは，エネルギーを使って時間の速度を加速しているといえるだろう．社会活動のペースを「社会の代謝速度」（つまりエネルギー消費率）で計り，これを社会生活の時間のめやすとするのはそれなりに使える考え方だと私は思っている（かなり丼勘定ではあるが）．

短い時間で大量の製品を生みだし，短い時間で移動し情報を集め，そして人としての寿命は伸ばす．結局，現代人は時間を操作しながら生活しているのではないだろうか．このような時代に，時間として絶対時間だけしか通用していない現状は，大いに問題であろう．もちろん共通の時間の物差しは必要なのだが，その物差しの上で，いろいろな

時間が動いているという柔軟な時間の見方が，日常生活の上で常識になる必要があると私は考えている．


参考文献

1) Stahl, W.R. (1962) Similarity and dimensional methods in biology. *Science*, **137**, 205–212.
2) Calder, W.A.III (1984) Size, function, and life history. Harvard University Press.
3) Schmidt-Nielsen, K. (1984) Scaling-Why is animal size so important? Cambridge University Press.
4) 本川達雄 (1996) 時間—生物の視点とヒトの生き方．日本放送出版協会．
5) Blum, J.J. (1977) On the geometry of four-dimensions and the relationship between metabolism and body mass. *J. Theor. Biol.*, **64**, 599–601.
6) McMahon, T. (1973) Size and shape in biology. *Science*, **179**, 1201–1204.
7) Witting, L. (1995) The body mass allometries as evolutionarily determined by the foraging of mobile organisms. *J. Theor. Biol.*, **177**, 129–137.
8) Patterson, M.R. (1992) A mass transfer explanation of metabolic scaling relations in some aquatic invertebrates and algae. *Science*, **255**, 1421–1423.
9) West, G.B., Brown, J.H. & Enquist, B.J. (1997) A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. *Science*, **276**, 122–126.
10) West, G.B. (1999) The origin of universal scaling laws in biology. *Physica A*, **263**, 104–113.
11) Banavar, J.R., Maritan, A. & Rinaldo, A. (1999) Size and form in efficient transportation networks. *Nature*, **399**, 130–132.
12) Nakaya, F., Saito, Y. & Motokawa, T. (1998) Experimental allometry: How does metabolic rate change with colony size of ascidians? *Zool. Sci.*, **15** (Supplement), 115.
13) 木崎伸也，仲矢史雄，本川達雄 (2000) 生物のサイズスケーリング—代謝の 3/4 乗則を示すモデル—．日本物理学会，秋季大会講演集．



（もとかわ・たつお，東京工業大学生命理工学部）

# 細胞の寿命とアポトーシス／アポビオーシス

田沼　靖一

## 1. はじめに

この地球上に生息している生物は，大腸菌のような原核生物と私たちヒトなどのような真核生物に大別される．原核生物は環境条件さえ整っていれば，常に分裂増殖を繰り返すことができる．つまり，無死であり寿命なるものはない．しかし，真核生物にはいつか必ず死が訪れる．生きられる時間，すなわち寿命が決まっているのである．この寿命とはいったい何なのだろうか．

生物の基本単位は細胞であり，この細胞に寿命が遺伝子としてプログラムされていることがわかってきた．細胞の寿命とは，真核生物が遺伝子を時空を超えて遺し伝えるための細胞死（アポトーシス／アポビオーシス）の機構の反映に他ならないと考えられる．本稿では，この視点から細胞の寿命と死について最近の知見を紹介する．

## 2. 個体寿命

高齢化社会を迎えて，老化や寿命という言葉をよくみかけるようになってきた．ここで寿命といっているのは平均寿命のことであり，0歳の赤ん坊がこれから何年生きられるかを表わす数値である．栄養状態や医療の充実によって平均寿命が延びても，最長寿命はヒトの場合せいぜい120歳前後であり，生きられる限界が決まっている．この限界がくるまでの期間が寿命であり，寿命が尽きるまで年を重ねて（加齢）さまざまな機能が低下してくることが老化である．

『広辞苑』によれば，「老化」とは「年をとるにつれて生理機能が衰えること」となっている．一方，「寿命」とは「生命機能が尽きるまで続く期間」となっている．寿命は動物種によって大きく異なるが，同一種ではその最長寿命がほぼ決まっている．たとえば，ラットは3年，ウマは50年，ヒトは120年である（図1）．このことから，寿命は遺伝的にプログラムされた先天的な要因によって支配されていると考えられている．

多くの場合，老化の結果として寿命がくることになるので，両者はいわば原因と結果のように思われるが，寿命は必ずしも老化によって決まるも

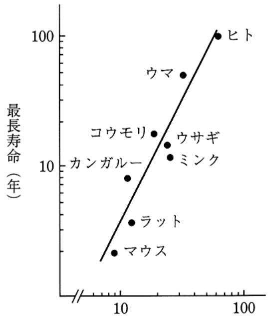


図1　生物固有の最長寿命と細胞寿命との相関．

のではなく，それ自身遺伝的に決められている．いい換えれば，個体の老化は不可逆的に生理機能が衰退する過程であり，不確定論的な現象であるのに対して，寿命は生命の営みの限界を表わし，遺伝的に支配された決定論的な現象である．

それでは個体の寿命はどのように決められているのだろうか．一般的には，動物の最長寿命はエネルギー消費速度に逆比例することが知られている．

$$最長寿命 = \frac{K}{エネルギー消費速度}.$$

哺乳類では体が小さい動物は大きいものに比べて一定体積に対する体表面積が大きくなるため，体温を一定に保つために多くのエネルギーを消費しなければならない．したがって，小型動物はエネルギー消費速度が速いため短命となる．この式はまた，寿命が尽きるまでに動物が消費する総エネルギー量は一定であることを示している．

食物を制限して毎日の消費エネルギーを減らすように飼育したラットは長生きする．また，過度に運動させると短命になるともいわれている．しかし，スポーツなどの運動をまったくしないでエネルギー消費を落としても寿命は延びない．それは運動をしないと筋肉や内臓機能が低下して早く老化が進むためである．ストレスが多い場合にも老化が促進されて寿命が早くきてしまうため，遺伝的に決定された最長寿命を全うすることが難しくなる．

このことから個体の寿命は二種類あることがわかる．すなわち，動物種に固有な遺伝子に規定された“遺伝的寿命”と，個体の老化の結果としての“老化的寿命”である．動物が高等になるにしたがって後者が優位となってくる．ヒトが最長寿命を全うしにくいのは，そのよい例である．下等動物の線虫やセミなどの昆虫は前者であり，どの個体もほぼ一定の生存期間を示す．

## 3. 細胞死

個体は細胞と細胞社会より成り立つ二重の生命構造をとっている．そこで個体の寿命は本質的には，生命の基本単位である細胞の寿命に規定されていると考えてよい．高等動物の個体を構成している細胞は，体を造り上げている体細胞と子孫を残すための生殖細胞に大別される．体細胞には，血液細胞や肝細胞のように新しい細胞に交替できる再生系細胞と，神経細胞や心筋細胞のように生まれてから何十年もの間同じ細胞が生きつづける非再生系細胞がある．再生系の細胞も非再生系の細胞も永遠に生きられることはできず，ある時期がくると死を迎える．その死は細胞自身に内蔵された死の装置の発動によって起きる．すなわち，そのプログラムは遺伝子の中に書き込まれているのである．この遺伝子に支配された細胞死は生命の根幹にかかわる問題であり，生物の寿命および老化のメカニズムを解き明かすカギもここに隠されているに違いない．

細胞の死というと，これまでは細胞が膨潤し，やがて破裂するという単なる崩壊過程としてしか考えられていなかった．そして，それはネクローシス（necrosis, 壊死）という言葉で一括されてきた．しかし，ここ数年の間にアポトーシス（apoptosis, 自死）と呼ばれる細胞の死に方が薬学・医学の分野で注目を集めるようになってきた．

アポトーシスという言葉は，apo (off, 離れて) と ptosis (falling, 落ちる) の合成語であり，木の葉や花びらが散る様子を表わすギリシャ語“$\alpha\pi o\pi\tau o\sigma\iota\varsigma$”が語源となっている．アポトーシスは細胞自らが能動的に死ぬ様式であり，細胞の“自殺”ともいわれている．現在のところ，細胞死はアポトーシスとネクローシスの二つに大別されている．

しかしながら，細胞の死に方はこの二つだけなのだろうか．中枢の神経細胞や心臓の心筋細胞のように再性能を失った細胞は何十年もその高度な機能を果たしている．これらの非再生系の細胞がアポトーシスによってたえず細胞交代していたら，個体の統一性は保たれなくなってしまう．このような非再生系の細胞の死は個体の死に直接かかわってくる．

そこで私は，神経細胞のような非再生系の細胞死を「アポビオーシス（apobiosis, 寿死）」と名づ

表 1　細胞死の分類.

| | | |
|---|---|---|
| (1) 遺伝子に支配された細胞死 | | |
| | アポトーシス（apoptosis, 自死） | |
| | 再生系細胞 | 統制 |
| | アポビオーシス（apobiosis, 寿死） | |
| | 非再生系細胞 | 寿命 |
| (2) 遺伝子に支配されない細胞死 | | |
| | ネクローシス（necrosis, 壊死） | |
| | すべての細胞 | 事故 |

け，アポトーシスとは別の概念としてとらえることを提案した（表 1）. "apobiosis" の "bios" は「生命」,「生きていること」を意味し，接頭語の "apo"（離れる）をつけると,「生命から離れる」「寿命が尽きる」を表わすギリシャ語となる.

アポトーシスはもとになる幹細胞が存在する再生系の細胞に起こる死であり，細胞の増殖や分化と同じ次元で考えられるものである．これに対して，アポビオーシスは幹細胞がなくなってしまい，直線的に変化していく非再生系の細胞の終焉としてとらえることができる．多細胞生物には，遺伝子に支配された細胞死として，アポトーシスとアポビオーシスという概念的に異なる二つの細胞死が存在する（図 2).

## 4. アポトーシス／アポビオーシス

アポトーシスの事象は個体の一生の諸相でみられる．発生過程において，オタマジャクシの尻尾がなくなったり，手足の指ができるときに指の間の細胞が消失したり，あるいは神経系のネットワーク形成の際にシナプスの形成ができなかった細胞が除去されるのは，アポトーシスによる.

成熟個体においても，血液細胞，皮膚の表皮細胞，小腸や胃の上皮細胞，肝細胞などにおける正常細胞の交替時に古い細胞が消去されるのも，自己抗原反応性のリンパ球が排除されるのもアポトーシスによる.

こうした生理的な細胞死の他に，HIV 感染による T 細胞死，制癌剤の投与や温熱療法による癌細胞死，アルツハイマー病の神経細胞死などの病理的細胞死にもアポトーシスが関与している.

アポトーシスの生理的役割は主に二つある．その一つは，発生過程や成熟個体において不要になった細胞を除去して成体の統制を保つ生体制御的な役割である．もう一つは，ウイルス感染や発癌性物質などにより異常をきたして，生体にとって有害となる細胞を排除する生体防御的な役割である.

一方，アポビオーシスは神経細胞や心筋細胞の死であり，自然死的な要素がつよい．アルツハイマー病やパーキンソン病などの神経変性疾患における神経細胞死はアポビオーシスなのか，あるいはアポトーシスによるものなのかはまだよくわかっていない．病的な状態でみられる非再生系の細胞死はアポビオーシスではなく，それまで眠っていたアポトーシスが再び発現して起こる可能性も考えられる．この点についても今後の研究を待たなければならない.

このように多細胞生物の個体の中には，アポトーシスとアポビオーシスという次元の異なる細胞死が存在している．アポトーシスは置き換えの可能な「再生系細胞に備わった細胞消去の機能」であるといえる．これによって細胞は個体の循環に戻っていく．新たな細胞の新生のために．一方，アポビオーシスは置き換えの不可能な「非再生系細胞に賦与された個体消去の機能」であるといえる．これによって個体は自然の循環に戻る．新たな個体の生存のために．この二重の細胞死の機構により細胞寿命があり，個体はその生命を維持できるとともに，必ず消滅するように仕組まれている.

## 5. 細胞寿命

再生系の細胞はその幹細胞から新しい細胞を供給できるようになっているが，それには限界がある．ヒトの細胞の場合は 50〜60 回分裂増殖をくり返したところで分裂限界がくる．これを "分裂寿命" という．ここで「分裂寿命」とは，その細胞のもつ分裂回数の限界までに達する期間を意味する．この分裂限界に近づいていく過程が再生系の細胞老化ということになる．そして，この先に

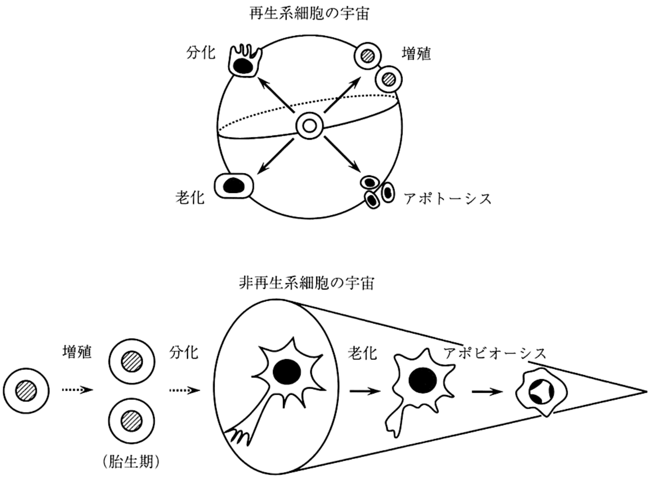



図2　アポトーシスとアポビオーシス.

アポトーシスがある．これらの細胞にはいわば回数券のような決められた分裂回数＝アポトーシス回数がある．再生系の細胞はこの回数券を消費し尽くすと，アポトーシスを起こして死滅する．

一方，胎児のうちに分裂能力が失われてしまった非再生系細胞の場合は高度に分化した機能を果たせる期間に限界がある．それを「分化寿命」と名づけることにする．この分化寿命に近づいていくことが非再生系細胞の細胞老化であり，その先にアポビオーシスがある．非再生系の細胞も寿命は永遠ではなく，ある決まった時期がくると死滅する．ここには当然分裂回数というものはなく，むしろ定期券のような分化寿命が決まっている．その期日がくると，アポビオーシスのスイッチが入り細胞は消滅する．この細胞死によって個体の死は確実に導かれる．すなわち，アポビオーシスによって個体の消滅は保証されているのである．

こう考えると個体の寿命，すなわち死は，再生系と非再生系の細胞にそれぞれ発現してくるアポトーシス因子とアポビオーシス因子の両者によって規定されてくるものと推察される．つまり，個

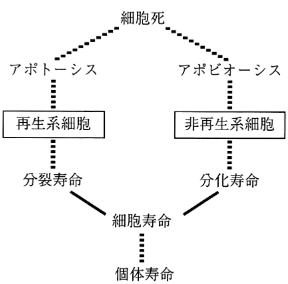



図3　細胞死と細胞寿命.

体の死はアポトーシスとアポビオーシスの二つの細胞死による二つの寿命，分裂寿命と分化寿命のある総和によって決まると考えられる（図3)．

線虫や昆虫では生体はすべて非分裂性の細胞群からなっているため，その寿命はおそらくアポビオーシス因子によって規定されることになると考えられる．ヒトなどの高等動物では，成体は再生系と非再生系の細胞群からなっているが，寿命を規定する要因は，おもにアポビオーシス因子であ

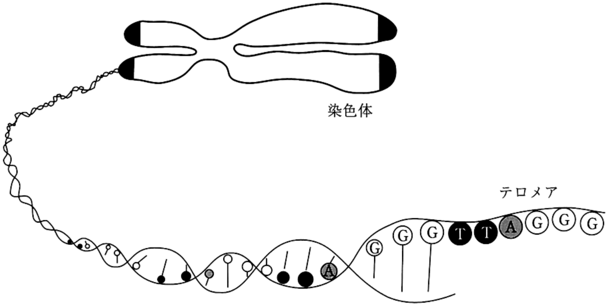



図4　染色体とテロメア．

ろう．しかし，この発現にはアポトーシス因子によって引き起こされる再生系の細胞の分裂寿命も影響を及ぼしていると考えられる．さらに，アポトーシスやアポビオーシスの発現に関与する後天的な老化因子の重要性も否定はできない．

## 6. 寿命因子

再生系の細胞に有限の寿命を与えているものは一体何であろうか？ その時間のカウンターとして現在注目されているのがテロメアと呼ばれる特殊な DNA 配列である．これは染色体の末端にあり，ヒトの場合は (TTAGGG) という六文字（塩基）配列が数百から数千くり返された構造をとっている（図 4）．DNA としては長いもので約一万塩基対ほどである．このテロメアは線状になった染色体の構造を安定に保つための役割を果たしていると考えられている．大腸菌では染色体が環状であり，テロメアは存在しない．酵母，ゾウリムシでは，それぞれ (TGGG) と (TTGGGG) という四～六文字配列が単位となったくり返し構造が存在する．このテロメア構造はテロメラーゼと呼ばれる酵素によって合成される．

染色体末端のテロメア部分は，DNA 複製のときに完全には複製できないため，細胞分裂をくり返すたびに短くなっていく．テロメアの長さが一万塩基対ほどから約五千塩基対まで短くなると，そこで細胞は分裂できなくなってしまう．これは，テロメアがこれ以上短くなると染色体の安定性が保てなくなってしまう限界であると考えられている．老化した細胞ではテロメアが短縮して安定性が悪くなるために異常な染色体構造がみられるようになる．ヒトの場合，生殖細胞や造血幹細胞はテロメラーゼが発現しており，テロメアが短縮しないようになっている．

しかし，動物種によっては，テロメアの長さと最長寿命が相関しない場合もある．マウスは最長寿命が 3.5 年でヒトの三十分の一に過ぎないが，意外なことにマウスのテロメアはヒトのそれよりも数倍も長い．また，生体内ではどのくらいの速度で細胞分裂が行われているのか，種々の細胞によって異なることもあり一概に計算できない．個体が寿命を全うして死んでもまだ分裂寿命が残っていることもあり得る．

いずれにしても，テロメアの長さがもとの長さの約半分までに短縮されると細胞の分裂寿命が尽きて細胞分裂できなくなってしまう．これが個体に寿命をもたらすと考えるのは自然であろう．しかし，現時点では，細胞分裂がどのくらい直接的に個体の寿命に関係するのかは議論のあるところである．また，個体の寿命は個体を構成している組織や臓器の老化の速度に影響を受けるのも事実である．

一方，分化寿命を規定している要因と考えられるものがいくつかみつかっている．遺伝学の分野で実験動物としてよく使われている体長 1 mm ほ

どの下等な多細胞生物の線虫（C. エレガンス）では，寿命が異なる変異体がいくつかとれている．その原因遺伝子の解析から *age-1* と名づけられた寿命遺伝子が同定された．C. エレガンスは約二十日ほどの寿命であるが，*age-1* 変異体は約一ヶ月ほど生き延びることができる．また，正常では卵を150個ほど産むが，この変異体は20～30個しか産めない．*age-1* 遺伝子産物は，ホスファチジルイノシトールリン酸化酵素であることがわかった．また，*age-1* 変異体では活性酸素を分解する酵素であるスーパーオキシドディスムターゼ（SOD）やカタラーゼの活性が高い．しかし，両者の関係がどのようにつながっているのかはまだよくわかっていない．

*age-1* の他に *daf-2* や *daf-16* と名づけられた長寿遺伝子がみつかっている．*daf-2* はヒトのインスリン受容体にそっくりな遺伝子である．インスリン受容体はブドウ糖などの栄養を細胞に取り込んだり，蓄えたエネルギーの放出を防ぐ役割を果たしている．この *daf-2* によって制御される遺伝子が *daf-16* である．*daf-16* が働くと SOD の活性が高まり，酸化ストレスに対する抵抗性が増す．*daf-2* が異常になると *daf-16* を抑えられなくなるため，SOD の働きが異常に高まって酸化ストレスが取り除かれるために寿命が延びるというストーリーが成り立つ．また *daf-2* はエサが極度に取れなくなり飢餓状態になったときにも *daf-16* を働かせて，糖（エネルギー）代謝を抑えて成長を止めて過酷な環境を乗り越える働きもしている．これは，食事制限をしてカロリーを下げることによって個体の寿命が延びるという動物実験の結果と一致するものであり興味深い．

このような寿命を支配する遺伝子は哺乳類ではまだみつかっていない．ラットなどでは子をたくさん産んだ個体の方が早く老化して寿命がくることが知られている．これは妊娠を何回もすると，グルココルチコイドの分泌が増加し，脳の海馬の神経細胞死が促進されるためであると考えられている．この細胞死はアポビオーシスによるものと考えられる．こういった実験系を利用して，アポビオーシスのスイッチがどのように入力されるのかを分子レベルで解明することが，分化寿命の理解に重要な糸口を与えてくれるかもしれない．

## 7. おわりに

生物の一つひとつの細胞に死の機構が遺伝子として深く刻み込まれていることが，最近の分子生物学的な研究から明らかになってきた．細胞にプログラムされた死により，細胞の寿命が規定され，その反映として個体の死があることは間違いないことだろう．多細胞生物の個体の中には，次元の異なる細胞の死が存在している．アポトーシスはいわばうたかたのようなもので，その深部には底流としてアポビオーシスが時を刻んでいる．しかし，その全貌の理解にはまだほど遠いといわざるを得ない．

アポトーシスとアポビオーシスの機構は，部分的には共通であろうが，制御機構は共通ではないはずである．ましてや，寿命との連関となるとそれを担う分子（遺伝子）は今私たちが知っている以上にもっとたくさんあるのではないだろうか．寿命を担う主役はまだ隠れているような気がする．そこには一つの個体のもつ時間を完結するためのものだけではなく，死生循環の時間軸を支配するものも当然考慮しなければならないはずである．

### 参考文献


1) Hayflick L and Moorhead P (1961). The serial cultivation of human diploid cell strains. *Exp Cell Res* **25**: 585–621.
2) Jazwinski SM (1996). Longevity, genes, and aging. *Science* **273**: 54–59.
3) 高木由臣 (1993). 生物の寿命と細胞の寿命．平凡社．
4) Kerr JFR, et al (1972). Apoptosis: a basic biological phenomenon with wide-ranging implications in tissue kinetics. *Br J Cancer* **26**: 139–157.
5) Tanuma S (1996). Molecular mechanisms of apoptosis. In Apoptosis in Normal Development and Cancer. (Sluyser Med) Taylor & Francis, London pp.39–59.
6) 田沼靖一 (1996). アポトーシスとは何か（講談社現代新書）．講談社．


（たぬま・せいいち，東京理科大学薬学部）

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-7: for Senior & Graduate Courses）

# 複雑系経済学とその周辺

## 経済動学から複雑系へ

西村和雄編著

本体 1762 円　送料 310 円　　表示価格は税抜きです



サイエンス社

**書評**

ブルーバックス　B-1295

# マンガ 量子論入門　だれでもわかる現代物理

J.P. マッケボイ，オスカー・サラーティ著，治部眞里訳，新書変形判，192 頁，本体 800 円，講談社

この本を治部眞里さんから送ってもらい，読もうと思っていた矢先に，書評を依頼されたので，お受けすることにした．

年配の方なら，本のタイトルを見て，若い人達向けの“最近はやりのマンガの解説本かな”と思う人が多いのではないだろうか？「数理科学」の読者の多くの方も，きっとタイトルを見ただけで“たかがマンガ”などとバカにして，自分の読む範疇の本ではないと決めてかかって，書評すら読む気にならないかもしれない．私も多少の抵抗を感じたものの，書評がよい意味でプレッシャーになって，読み通すことができた．

図が豊富にあって確かにマンガのようだが，同時に文章も結構たくさんある．ただ，文章だけを拾い読みをしてはいけない．そうすると，話が途切れてしまう．文章の部分から，マンガの部分に飛び移ってまた文章の部分に戻って読むといった具合に進める必要がある．こんなことに慣れながら読み進んでいくうちに，私の思っていたマンガのイメージとは大分違っていることに気づいた．

難しい数式こそ出てこないが，仲々のレベルである．通常の量子論の教科書にはない内容をいろいろ含んでいる．たとえば，量子論の幕開けを告げるプランクの黒体放射の説明を行うのに，ヘルムホルツやクラウジウスの熱力学の法則，さらにマックスウェルの気体運動論，ボルツマンのエントロピーにまで遡る．これらの一人一人の寄与がブロックを積み上げていくように，エピソードを織り込みながら筋道立って描かれている．もっとも，文献が引用されている訳ではないので，エピソードの一つ一つまで，その真偽を確かめる訳にはいかないが….

この本は，マンガ家が量子論をにわか勉強をして書いたのではない．著者はよほど科学史の深い知識を持った人であろうことを思わせる．

通常の教科書では完成した形の量子論だけが記述されるが，この本では量子力学が建設されていく経緯が，様々な人物を登場させて物語風に語られていく．アインシュタインの光量子，ボーアの原子モデル，そしてドブロイの波動説あたりまでなら，直覚的な説明も可能だが，ハイゼンベルグとマックス・ボルンの行列力学あたりにくると，簡単な説明は困難になってくる．しかし驚いたことに，これらを避けたり，ごまかしたりすることなく正面から立ち向かい，わかった気にさせてくれる．

シュレディンガーが電子の波動方程式を求め，それを水素原子に適用して，そこから出てくる輝線スペクトルの謎を解き明かす所までは，どの教科書にも出てくる．しかし，この本はそこで終わらない．自分が構築した量子論をどう解釈したらよいのか，電子の実体が何であるのか，についてシュレディンガーは悩む．粒子を波の重ね合わせで理解しようとしたり，光が原子から飛び出てくる理由を異なった 2 つの電子の波の“うなり”で説明しようとする．しかし，古典的な説明はどれもうまくいかないことが，ローレンツによって指摘される．やがて電子の波は我々には観測できない確率波であるとするマックス・ボルンの確率解釈に至り，粒子性と波動性の辻褄合わせが行われる．

どうしてもボルンの解釈を認めることのできないシュレディンガーは，後に“シュレディンガーの猫”と呼ばれる常識とは相容れない現象を提起する．ボルンの解釈によれば，箱の中を開けてみるまで，猫は生死が同居しており，箱を開けた途端に，生死どちらかの状態になるという．また，量子論が完全な理論であるとは信じられなかったアインシュタインは，“アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンのパラドックス”を考え出す．これらの問題はいまだにある人たちを悩ませ続け，ある人たちはそれを実験的に確かめようとしている．こうした議論を通して，量子論ならではの不可解なミクロの世界の特徴が浮き彫りにされる．

この本は，原子分子の世界を支配する法則，“量子論”そのものに興味を持っている人，それがどうやって作られたかということに関心のある人には打ってつけである．量子論の面白さ不思議さを体感するには数式がなくても十分である．物理を専門にやりたい人にとっては，勿論この本だけでは不十分だが，合い間にこんな本を読んでおくと，ためになる．難しい数学の勉強にのめり込んでしまって，一体今自分は何をしているのだろうと，自分を忘れてしまわぬように．

外村　彰（(株)日立製作所基礎研究所）

# 代数曲線と「曲面」をめぐって

向井 茂

数体（有理数体の有限拡大）と 1 変数代数関数 $f(x,y)=0$ の体の類似は注目され続けて久しい．100 年前に Hilbert が第 12 問題（類体の構成）を提出した際に書いているように，相互法則は曲線に対する Abel の定理の算術版である．.また，Riemann 予想は未解決であるが，合同ゼータ関数に対するそれは Weil によって解かれ，本来の予想に対して貴重な示唆を与えている．これに対して，20 世紀後半に進展したのは数体上の曲線と 2 変数代数関数 $f(x,y,z)=0$ に対するそれぞれの理論と両者の類似に対する研究ではないかと思う．

この方面での大きな成果は Mordell 予想の解決（Faltings[8]）であるが，数体上の楕円曲線の有理点に関する問題が未解決で残っている．簡単のために $x,y$ を未知数とする整数係数不定方程式

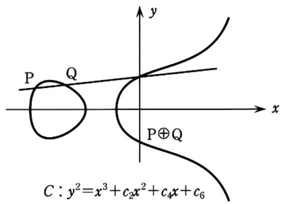
$$y^2+c_1xy+c_3y=x^3+c_2x^2+c_4x+c_6 \tag{1}$$

$c_1,c_2,c_3,c_4,c_6\in\mathbf{Z}$, を考える．これに無限遠点 $\infty$ を付加して得られる曲線を $C$ で表そう．よく見る**図 1** は $C$ の実数体上の姿であるが，$C$ は各素数 $p$ ごとに有限体 $\mathbf{F}_p:=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上の顔をもつ．

合同方程式

$$y^2+c_1xy+c_3y\equiv x^3+c_2x^2+c_4x+c_6,$$
$$\bmod p \quad 0\le x,\ y\le p-1$$

の整数解 $(x,y)$ の全体と $\infty$ を $C$ の $\mathbf{F}_p$ 有理点という．これらの個数を $N_p$ とし，$a_p=p+1-N_p$




$C: y^2=x^3+c_2x^2+c_4x+c_6$

図 1

とおく．そして，$L$ 関数 $L(s,C)$ を無限積

$$\prod_{\text{悪い}\,p}\left(1-\frac{\epsilon_p}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\text{よい}\,p}\left(1-\frac{a_p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}\right)^{-1} \tag{2}$$

で定義する．ただし，よい素数 $p$ とは $C$ の判別式を割り切らないもので，$p$ を法とする還元 $C(p)$ は特異点をもたない．悪い素数は有限個しかなく，$\epsilon_p=0,\pm1$ は次の予想とは関係ないので説明を略す．(2) は右半平面 $\mathrm{Re}\,s>3/2$ でしか絶対収束しないが，後述の予想 2 が正しいので，全平面上の有理型関数に解析接続される．

**予想 1**（Birch と Swinnerton-Dyer[2]）複素関数 $L(s,C)$ の $s=1$ での零点の位数は群 $C(\mathbf{Q})$ の階数 $r$ に等しいだろう．

ただし，$C(\mathbf{Q})$ は (1) の有理数解 $(x,y)\in\mathbf{Q}^2$ の全体に $\infty$ を付加したもので，よく知られているように，可換群の構造をもつ．また，$C(\mathbf{Q})$ は

群として有限個の元で生成される（Mordell[12]）．よって，有限群と $\mathbf{Z}^r$ の直和と同型である．

予想は $x \to \infty$ のときの $f(x) = \prod_{p \le x} N_p/p$ の発散の程度が $(\log x)^r$ の定数倍のようだという観察から生まれた．

**例 1**　楕円曲線

$$C : y^2 + y = x^3 + x^2 \cup \{\infty\}$$

の悪い素数は 43 だけである．最初の 10 個の素数 $p \le 29$ に対する $N_p$ の値は

$$5, 6, 10, 8, 9, 19, 21, 22, 25, 36$$

で，$N_p/p$ の積は約 26 である．また，$C$ は $(0,0)$ を無限位数の有理点にもち，$C(\mathbf{Q})$ の階数は 1 である．（[5] よりとった．）

BSD 予想はたくさんの根拠をもっている．また，現在では $L(s, C)$ の $s = 1$ での零点の位数が 1 以下のときに証明されている．これらについては [24] や [6] のよい解説にまかせる．ここでは，曲面論の枠組みからも支持したくなる自然な予想であるという Tate 以来の考えを紹介する（第 1 節から第 4 節）．

曲線にはなく 2 次元以上で新たに現れる現象として次がある．

(A)　Néron-Severi 群の階数が大きくなる．また，簡単にはわからない．

(B)　余次元 2 の部分多様体がある．

BSD 予想は (A) に関する問題であるが，(B) も新たな困難を産む．第 5 節では，その代表として Bloch 予想を述べる．最終節では (A) と Hilbert の第 14 問題との関連を議論する．

## 1. ゼータ関数（[1]）

数体 $K$ に対して整数環 $\mathcal{O}_K$ のイデアル $\mathfrak{a}$ のノルム $N(\mathfrak{a})$ を使って $K$ の（Dedekind）ゼータ関数

$$\zeta_{\mathcal{O}_K}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \tag{3}$$

が定義される．有理数体の場合の

$$\zeta_{\mathbf{Z}}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

は Riemann ゼータと呼ばれ，とくに有名である．これらは全（複素）平面に有理型に解析接続される．$s = 1$ にだけ極をもち，しかも 1 位である．$K$ の $\mathbf{C}$ への埋め込みのうち，実，複素なものの個数を $r_1, 2r_2$ として，その分だけ $\Gamma$ 因子を掛けたもの

$$\zeta_K(s) = \frac{\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}}{\pi^{r_1 s/2}(2\pi)^{r_2 s}} \zeta_{\mathcal{O}_K}(s) \tag{4}$$

は関数等式

$$\zeta_K(s) = |d|^{-s+1/2} \zeta_K(1-s) \tag{5}$$

をみたす．ただし，$d$ は $K$ の判別式である．このゼータの零点の実部がすべて 1/2 であろうというのが一般化された Riemann 予想である．

1 変数代数関数体は完備非特異代数曲線と 1 対 1 に対応する．以下，単に曲線と呼ぶ．有限体上の曲線 $C$ の場合も上と似た方法でゼータ関数が定義できる．$\mathbf{F}_p$ 上の超楕円曲線

$$y^2 = x^{2g+1} + c_1 x^{2g} + \cdots + c_{2g} x + c_{2g+1} \tag{6}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{2g+1} \in \mathbf{F}_p$, を例に説明しよう．$\mathfrak{a}$ が環 $R = \mathbf{F}_p[x, \sqrt{f(x)}]$ のイデアルをすべて走るときの (3) の右辺を $\zeta_R(s)$ で表す．この曲線 $C$ は無限遠に一つの有理点をもつので

$$\zeta_C(s) = (1 - p^{-s})^{-1} \zeta_R(s)$$

が $C$ のゼータ関数である．これは (5) と似た関数等式

$$\zeta_C(s) = p^{(g-1)(1-2s)} \zeta_C(1-s) \tag{7}$$

をみたす．イデアルのノルムは常に $p$ のベキで，$\zeta_C(s)$ は有理式

$$\frac{a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - \cdots - a_{2g-1} t^{2g-1} + a_{2g} t^{2g}}{(1-pt)(1-t)},$$
$$a_i \in \mathbb{Z}, \ a_0 = 1 \tag{8}$$

に $t = p^{-s}$ を代入したものに一致する（第4節も見よ）．$g$ は $C$ の種数である．関数等式 (7) は (8) の分子の反転対称性 $a_{2g-i} = p^{g-i}a_i$ と同値である．

有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された曲線 $C$ に対しては，有限個を除く素数 $p$ に対して $\mathbf{F}_p$ 上の（非特異）曲線 $C(p)$ が定まる．これらの合同ゼータ関数の無限積

$$\zeta_C(s) = \prod_p \zeta_{C(p)}(s) = \frac{\zeta_{\mathbf{Z}}(s-1)\zeta_{\mathbf{Z}}(s)}{L(s,C)}$$

を $C$ の Hasse-Weil ゼータ関数という．ただし，有限個の悪い素数に関する部分は無視した．また，$L(s,C)$ は (8) の分子に $p^{-s}$ を代入したものの無限積の逆で，Hasse-Weil の $L$ 関数と呼ばれる．$a_{2g} = p^g$ なので，$C$ が楕円曲線（$g=1$）の場合は (2) と一致する．$L(s,C)$ の零点は $\zeta_C(s)$ の極に寄与することに注意しよう．次は有名である．

**予想 2** 数体上の曲線 $C$ の Hasse-Weil の $L$ 関数 $L(s,C)$ は適当な関数等式をみたし，全平面で有理型な関数に拡張されるだろう．

楕円曲線の $L$ 関数 (2) に $\Gamma$ 因子を掛けた

$$L^*(s,C) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,C)$$

に対しては

$$L^*(s,C) = \pm N^{-s+1}L^*(2-s,C) \qquad (9)$$

が成立する．ただし，$N$ は楕円曲線 $C$ の導手である．これは，本質的には，Wiles たち（最終型は [3]）によって証明された $C$ のモジュラー性である．$L^*(s,C)$ はある重み 2 のモジュラー形式 $f(z)$ の Mellin 変換で，正則微分形式 $f(z)dz$ のモジュラー曲線上の周期として $L(1,C)$ が計算される（[5] 参照）．

さて，BSD 予想は楕円曲線に対して $C$ の有理点と $L(s,C)$ の零（ゼータの極）を関係づける．種数が 2 以上のときは，残念ながら，$L(s,C)$ が $s=1$ まで解析接続されるかどうかまだわかっていない．しかし，$L(1,C)$ について何を予想するのが妥当だろうか？ Faltings の定理 [8] より，$C$ の有理点は有限個しかないことに注意しよう．

## 2. イデアル類群

自然数は一意的に素因数分解される．また，体係数多項式も既約多項式の積に一意的に分解される．しかし，一般の環では分解の一意性は成立しない．

**例 2** $a + b\sqrt{-5}$（$a, b$ はともに整数）の全体 $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ は環で，$2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ が成立する．しかし，この環の中で 4 つの数はこれ以上分解できない．

数ではなくイデアルに移行すれば素イデアルの積へ一意的に分解できるというのは周知の事実であるが，やはり上は否定的な印象を与えるだろう．しかし，真実は逆で，一意性の成り立たない度合を計るものが定義され，それが環や代数多様体の重要な不変量になる．数体の場合は類数や類群であり，曲線の場合は種数や Jacobi 多様体である．

一般に，環の可逆イデアル全体のなす半群を主イデアル全体の部分半群で割って得られる剰余群をイデアル類群という．数体のイデアル類群はいつも有限で，その位数を類数という．例えば，上の $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアル類群は位数 2 で，$(2, 1+\sqrt{-5})$ がその生成元である．有限体上の曲線に対してもイデアル類群は有限であるが，無限体上の曲線に対してはもはや有限ではない．では，どの程度の無限だろうか？

$C$ をコンパクト Riemann 面としよう．1 点 $p_0 \in C$ を固定する．$C$ 上の有理型関数で $p_0$ でしか極をもたないものの全体は環をなす．これを $R$ とおき，ここでは $C$ の座標環と呼ぼう．$R$ の一意分解性とは，指定された零点をもつ有理型関数の存在問題である．$p_0$ 以外の $C$ の点の組 $p_1, \ldots, p_n$ に対して，次の問題を考える

(☆) 座標環 $R$ に属する関数でその零点集合が重複度をこめて $p_1, \ldots, p_n$ に一致するものが存

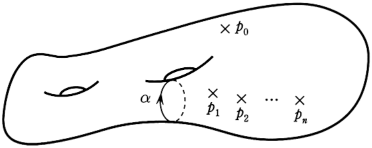



図 2

在するか？

答えがいつも Yes なら $R$ は一意分解的であるが，一般にはそうでない．例えば，$n=1$ で種数 $g$ が 1 以上なら上の答えは No である．

Abel の定理は $C$ 上の関数と微分形式の間の双対性である．$\omega_1, \ldots, \omega_g$ を $C$ 上の第 1 種微分（正則微分 1 形式）の基底とする．ちょうど種数個存在し，超楕円曲線 (6) の場合だと $\omega_i = x^{i-1}dx/y$ ととれる．$\alpha$ が $C$ 上の閉道をすべて動くとき，ベクトル

$$\int_\alpha \vec{\omega} := \begin{pmatrix} \int_\alpha \omega_1 \\ \vdots \\ \int_\alpha \omega_g \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^g \tag{10}$$

の全体 $\Gamma_C$ は部分群になる．これを周期格子という．点 $p \in C$ に対してベクトル値線積分 $\int_{p_0}^{p} \vec{\omega}$ を考える．これ自体は，$p_0$ から $p$ に行く道のとり方によるが，$\Gamma_C$ を法とすれば一意的に定まる．

**Abel の定理**　(☆) が正しいこととベクトル

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{p_0}^{p_i} \vec{\omega} \in \mathbf{C}^g$$

が周期格子 $\Gamma_C$ に属することは同値である．

この定理より座標環 $R$ のイデアル類群は $g$ 次元複素トーラス $\mathbf{C}^g/\Gamma_C$ であることがわかる．よって，複素数体上の場合，連続濃度をもつ．さて，この複素トーラスはその上のテータ関数を用いて（あるいは直接代数的な方法で）射影空間に埋め込むことができる．とくに代数多様体で，曲線 $C$ の Jacobi 多様体と呼ばれる（図 **2**）．これは Abel 多様体と呼ばれるものの基本例である（[16]，[17] や [13]§8 参照）．

曲線 $C$ が $\mathbf{Q}$ 上定義されるとしよう．簡単のために $C$ が有理点 $p_0$ をもつとして，$C$ の座標環 $R_{\mathbf{Q}}$ （$\mathbf{C}$ に係数拡大すると上の $R$ になる）のイデアル類群を考えよう．$C$ が $\mathbf{Q}$ 上の超楕円曲線 (6) のときは，環 $\mathbf{Q}\left[x, \sqrt{f(x)}\right]$ のイデアル類群のことである．これは $C$ の Jacobi 多様体（$\mathbf{Q}$ 上定義される）の有理点のなす群と一致する．とくに，Mordell-Weil の定理 [24] により有限生成である．（[16] の Manin による付録に証明がある.）これを $\mathbf{Q}$ 上の曲線 $C$ のイデアル類群と呼ぶ．

**予想 3**（Tate[22]）　$L(s, C)$ の $s=1$ での零点の位数は $C$ のイデアル類群の階数に一致するだろう．

$C$ が楕円曲線 (1) の場合，その Jacobi 多様体は $C$ 自身と一致する．よって，上は**予想 1** の一般化である．

予想 3 の幾何的類似を述べるために曲面を少し復習しよう．

## 3. 代数曲面

まず，複素数体上で考える．コンパクトな 2 次元複素多様体 $S$ で射影空間に（正則に）埋め込めるものをこの節では曲面と呼ぶ．曲線の正則部分多様体は点しかなかったが，曲面には点と曲線の 2 種類がある．曲線 $C \subset S$ は $S$ の位相的 2 サイクルを定める．曲線のホモロジー類 $[C]$ の全体で生成される $H^2(S, \mathbf{Z})$ の部分群を Néron-Severi 群といい，$\mathrm{NS}(S)$ で表す．これの階数 $\rho$ は Picard 数と呼ばれる．$S$ 上の 2 サイクルは $\mathrm{NS}(S)$ に属するとき代数的であるという．

**Lefschetz の定理**　2 サイクル $\alpha$ はすべての正則微分 2 形式 $\omega \in H^0(\Omega_S^2)$ に対して

$$\int_\alpha \omega = 0$$

が成立するとき代数的である．（逆も正しい.）

2 サイクルの対 $\alpha, \beta$ に対しては交点数 $(\alpha.\beta) \in \mathbf{Z}$ が定まる．とくに，整数値内積

$$\mathrm{NS}(S) \times \mathrm{NS}(S) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

が得られる．この内積付きで考えたアーベル群 $\mathrm{NS}(S)$ を Néron-Severi 格子という．

**例 3**　射影平面 $\mathbf{P}^2$ のホモロジー群は直線のホモロジー類 $h$ で生成される．自己交点数 $(h^2)$ は 1 である．射影直線の直積 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ の場合は水平方向の $\mathbf{P}^1$ のホモロジー類 $a$ と垂直方向の $b$ で生成され，交点数については

$$(a^2) = (b^2) = 0, \quad (a.b) = 1$$

が成立する．

曲面 $S$ に対しては，1 点を Riemann 球で置き換えて新しい曲面 $\tilde{S}$ を作ることができる．これを爆発（blow up）という（図 **3**）．新たに出現した Riemann 球 $E \simeq \mathbf{P}^1$ を例外直線という．これのホモロジー類 $e$ は代数的で $\mathrm{NS}(S)$（の引き戻し）と直交し，$(e^2) = -1$ をみたす．とくに，$S$ を $n$ 点で爆発した曲面の Néron-Severi 格子は

$$\mathrm{NS}(S) \perp \mathbf{Z}e_1 \perp \cdots \perp \mathbf{Z}e_n, \quad (e_i^2) = -1$$

である．

**例 4**　射影平面を $n$ 点で爆発した曲面の上の代数的 2 サイクルは

$$ah - \sum_i b_i e_i \qquad a, b_i \in \mathbf{Z}$$

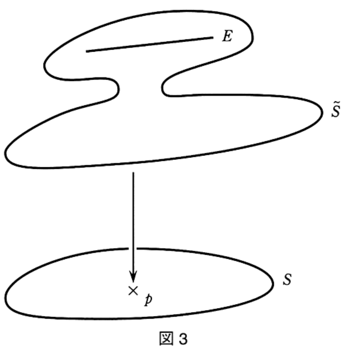



図 3

と表され，それの自己交点数は $a^2 - \sum_i b_i^2$ である．

**Hodge 指数定理**　代数曲面の Néron-Severi 格子の符号数は $(1, \rho - 1)$ である．すなわち，自己交点数の 2 次形式を実数体上で対角化すると

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_\rho^2$$

の形になる．

例 4 だけを見ていると見過ごしてしまいそうであるが，深い主張である．曲面上での小平消滅にも関係するし（Bogomolov, Reider[20]），有限体上の曲線 $C$ に対する Riemann 仮説は直積 $C \times C$ に対するこの定理より従う（Mattuck-Tate[11]）．

曲面の分類については触れられなかった．[19] 等を見られたい．

## 4. 有限体上の代数曲面

有限体上の曲面論は複素数体とほぼ同様に組み立てることができる．しかし，特異コホモロジー $H^i(S, \mathbf{Z})$ がエタールコホモロジーに置き換わる．一般に，代数多様体に対しては Grothendieck トポロジーを使って $l$ 進エタールコホモロジー $H^i(S, \mathbf{Q}_l)$ が定義され，これには定義体の Galois 群が作用することが知られている．とくに，有限体上の場合にはフロベニウス写像が $H^i(S, \mathbf{Q}_l)$ に作用する．これを $\sigma_i$ で表す．

$S$ を有限体 $\mathbf{F}_p$ 上の（完備非特異）代数多様体としよう．これの（合同）ゼータ関数は $S$ の $\mathbf{F}_{p^m}$ 有理点の個数 $N_m$ を使って定義されるベキ級数

$$Z(t, S) := \exp\left(\sum_m N_m \frac{t^m}{m}\right)$$

に $t = p^{-s}$ を代入したものに等しい．$Z(t, S)$ は有理式で，Lefschetz 固定点公式より，フロベニウス作用素 $\sigma_i$ の反転固有多項式

$$P_i(t) = \det(1 - t\sigma_i)|_{H^i(S)}$$

の交代積に一致することが知られている．これに対する Riemann 仮説は固有方程式 $\det(t - \sigma_i)|_{H^i(S)}$

の解（すなわち，フロベニウス作用素の固有値）の絶対値がすべて $p^{i/2}$ であるという主張で，A. Weil により予想され P. Deligne[7] によって証明された．

以下，$S$ は曲面とする．このとき，$Z(t,S)$ は

$$\frac{P_1(t)P_3(t)}{P_0(t)P_2(t)P_4(t)}$$

と表される．$Z(p^{-s})$ の $s=1$ での極の位数は，$\sigma_2$ の固有値における $p$ の重複度と一致する．

**予想 4**（Tate[23]）　$S$ 上の 2 サイクルでフロベニウス $\sigma_2$ で $p$ 倍されるものは代数的であろう．（逆も正しい．）言い換えると，$S$ のゼータ関数 $Z(p^{-s})$ の $s=1$ での極の位数は Picard 数 $\rho$ と一致するだろう．

曲面 $S$ が曲線への射 $S \to T$ をもつとき，上は予想 1，3 の幾何的類似である．

$s=1$ での $Z(p^{-s})$ の様子は多項式 $P_2(t)$ の $t=1/p$ での様子に他ならないが，これに関しては

$$\left.\frac{P_2(t)}{(1-pt)^{\rho}}\right|_{t=1/p} = \frac{\#Br(S)\cdot \mathrm{disc}\,\mathrm{NS}(S)}{p^{\alpha(S)}\cdot(\#\mathrm{NS}(S)_{tors})^2} \tag{11}$$

が予想されている．BSD 予想もこれに似ていて，極限値

$$\lim_{s\to 1}\frac{L^*(s,C)}{(s-1)^r}$$

は (11) において Brauer 群 $Br(S)$，Néron-Severi 群，交点形式をそれぞれ，Tate-Shafarevich 群，イデアル類群，height pairing に置き換えたものにある積分値を掛けたものであろうと予想されている．

BSD 予想のこの部分は Dedekind ゼータ関数 (4) に対する留数公式

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}hR}{w\sqrt{|d|}}$$

（または $s=0$ での留数）の高次元版と考えられる．ただし，$h$ は類数，$w$ は $K$ 内の 1 のベキ根の個数で，$R$ は単数基準（regulator）と呼ばれる量である．

駆け足で説明が不十分だったかもしれない．また，類似の世界の話でしかないが，BSD 予想 1，3 は上の Tate 予想 4 の算術版であり，後者は Lefschetz の定理から心情的支援をうけている．

## 5. Abel の定理の一般化の試み

第 3 節の複素数体上の曲面 $S$ に戻る．点 $p_0 \in S$ を固定し，$S$ 上の正則微分 1 形式の基底を $\omega_1,\dots,\omega_q$ とするとき，周期格子 $\Gamma_S \subset \mathbf{C}^q$ やベクトル値線積分 $\int_{p_0}^{p}\vec{\omega} \in \mathbf{C}^q$ が $\Gamma_S$ を法として曲線と同様に定義される．$p_0$ 以外の $S$ の点を $p_1,\dots,p_n$ とする．

**問題 1**　ベクトルの和

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{p_0}^{p_i}\vec{\omega} \in \mathbf{C}^q$$

が周期格子 $\Gamma_S$ に属するなら，$p_1+\cdots+p_n-np_0$ は 0 に有理同値か？　すなわち，完備な曲線（可約でもよい）からの正則写像 $C \to S$ と $C$ 上の有理関数 $f$ でもって，$f$ の零点が $p_1,\dots,p_n$ に極が $p_0$ にうつるものが存在するか？

これが正しいとすると，次数 0 の 0 サイクルの有理同値類が曲線のときのように複素トーラス $\mathbf{C}^q/\Gamma_S$（Albanese 多様体と呼ばれる）でパラメータづけられる．しかし，$S$ 上に零でない正則 2 形式が存在するとき，これは Mumford[15] の結果（0 サイクルの有理同値類の無限次元性）に反する．そこで，次の修正版が提出されている．

**予想 5**（Bloch[4]）　$S$ 上に正則 2 形式は（零しか）ないとする．このとき，上の問題は正しいだろう．（Lefschetz の定理よりすべての 2 サイクルは代数的である．）

## 6. 環の有限生成性

今までと趣が違うが次の状況を考えよう．一般線型群 $GL(n,\mathbf{C})$ は通常の変数変換でもって $n$ 変数多項式環 $S=\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ に作用している．

$GL(n, \mathbf{C})$ の部分群 $G$ に関して不変な多項式の全体 $S^G$ は部分環である．これが有限生成かという問題は永田 [18] によって反例が与えられているが，ここでは次を考えよう．

**Hilbert の第 14 問題**　不変式環 $S^G$ が有限個の多項式で生成されるための十分条件を与えよ．

群 $G$ が簡約な代数群なら正しいことはよく知られている（[13]§4 参照）．よって，$G$ が代数群のときは unipotent な場合が問題である．$G$ が 1 パラメータ部分群 $\{\exp tA \,|\, t \in \mathbf{C}\}$ の場合でいうと行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ がベキ零な場合である．多項式 $f(x)$ が $G$ で不変なことは $A$ より定まる微分作用素

$$D_A = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

で零化されることと同値である．

**例 5**　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対する 1 パラメータ部分群は変換 $\begin{cases} x \mapsto x + ty \\ y \mapsto y \end{cases}$ の全体で，これによる $\mathbf{C}[x, y]$ の不変式環は $\mathbf{C}[y]$ である．また，$D_A$ は $y\partial/\partial x$ である．

**定理**（Weitzenböck 1932）　ベキ零行列 $A$ より定まる 1 パラメータ部分群による不変式環

$$\{f(x) \,|\, D_A f(x) = 0\} \subset S$$

は有限生成である（[21] 参照）．

**問題 2**　可換なベキ零行列の対 $A, B$ より定まる 2 パラメータ部分群 $\exp(sA + tB)$ による不変式環

$$\{f(x) \,|\, D_A f(x) = D_B f(x) = 0\} \subset S$$

は有限生成か？

互いに可換な $2n$ 次ベキ零正方行列の $(n-3)$ 個の組 $A_1, \ldots, A_{n-3}$ をうまくとってくると不変式環は射影平面 $\mathbf{P}^2$ を $n$ 点で爆発して得られる曲面 $S$（例 4）と関係する（[18]，[13]§2.5 参照）．不変式環の有限生成性は $S$ の全座標環

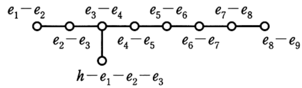



図 4

$$\bigoplus_{a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}} H^0(S, \mathcal{O}_S(ah - \sum_i b_i e_i))$$

のそれと同値である．ただし，各直和因子は点 $p_i$ で $b_i$ 重の零点をもつ 3 変数 $a$ 次斉次式全体のなすベクトル空間である．この環は $n \le 8$ までは有限生成であるが，$n \ge 9$ で点 $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{P}^2$ が一般の位置にあれば有限生成ではない．これは 9 点爆発に対応する Dynkin 図形（**図 4**）の Weyl 群が無限になるからであるが，詳細は別の機会にゆずる．

環の有限生成性に関しては正準環に関する問題が有名である．$X$ を $n$ 次元完備非特異代数多様体とする．局所的には座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ と正則関数 $f(z_1, \ldots, z_n)$ でもって

$$f(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

と表され，矛盾なく大域的に繋がるものが正則微分 $n$ 形式である．簡単に $X$ の正準形式と呼ばれる．これの全体を $H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ で表す．また，局所的に

$$f(z_1, \ldots, z_n)(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)^{\otimes k}$$

と表されて大域的に繋がるものを $k$ 重正準形式といい，それらの全体を $H^0(\mathcal{O}_X(kK_X))$ で表す．

**問題 3**　$X$ の正準環 $\bigoplus_{k \ge 0} H^0(\mathcal{O}_X(kK_X))$ は有限生成か？

一般の因子 $D$ に対しても環 $\bigoplus_{k \ge 0} H^0(\mathcal{O}_X(kD))$ が定義されるが，上は正しくない．正準環に著しいのはこの環が多様体 $X$ の双有理同値類のみによる点にある．上の問題が曲線で正しいことは Riemann-Roch 定理の演習問題である．曲面で正しいことは Zariski[25] の結果を使って Mumford[14] によって証明された．また，3 次元

で正しいことは，極小モデルに対しては川又 [9] によって示されていたが，最終的には森 [10] の極小モデルの存在によって確定した．

曲線と曲面という標題からは逸脱したが，3 次元双有理幾何の飛躍的な発展も 20 世紀後半のめざましい成果である．

## 参考文献


[1] ゼータ関数，数学辞典，第 3 版，日本数学会編，岩波書店，1985 年，532–554 頁．

[2] Birch, B. and Swinnerton-Dyer, H.P.F.: Notes on elliptic curves, II, *J. Reine Angew. Math.*, **218** (1965), 79–108.

[3] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F. and Taylor, R.: On the modularity of elliptic curves over **Q**, preprint.

[4] Bloch, S.: *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke Univ., (1980).

[5] Cremona, J.E.: *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, 2nd. ed., Cambridge Univ. Press, (1997).

[6] Darmon, H.: Wiles' theorem and the arithmetic of elliptic curves, in '*Moduler Forms and Fermat's Last Theorem*', pp.549–569, Springer-Verlag, (1997).

[7] Deligne, P.: La conjecture de Weil I, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273–307.

[8] Faltings, G.: Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349–366.

[9] Kawamata, Y.: On the finiteness of generators of a pluricanonical ring for a 3-fold of general type, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 1503–1512.

[10] Mori, S.: Flip theorem and the existence on minimal models, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 117–253.

[11] Mattuck, A. and Tate, J.: On the inequality of Castelnuovo-Severi, *Abh. Math. Sem.* Hamburg, **22** (1958), 295–299.

[12] Mordell, L.J.: On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degree, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **124** (1922), 179–192.

[13] 向井　茂：モジュライ理論 1, 2, 岩波書店，1998 年，2000 年．

[14] Mumford, D.: The canonical ring of an algebraic surface, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 612–615 (Appendix to [25]).

[15] Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 195–204.

[16] Mumford, D.: *Abelian Varieties*, 2nd. ed., Oxford Univ. Press., (1974).

[17] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta II*, Birkhauser, (1984).

[18] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, *Int'l Cong. Math.*, Edingburgh, (1958).

[19] Reid, M.: Chapters on algebraic surfaces, *Complex Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc., (1997), pp.3–159.

[20] Reider, I.: Vector bundles of rank 2 and linear system, *Ann. of Math.*, **127** (1988).

[21] Seshadri, C.S.: On a theorem of Weitzenböck in invariant theory, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1962), 403–409.

[22] Tate, J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions, in '*Arithmetical Algebraic Geometry*', ed. O.F.G. Schilling, Harper & Row, (1965), pp.93–110.

[23] Tate, J.: On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Bourbaki Sém., # 306, (1966).

[24] Wiles, A.: The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, *Millenium Prize Problems*, (2000), Clay Math. Inst. (www.claymath.org).

[25] Zariski. O.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 560–615.

（むかい・しげる，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

# 第5講　スカラー・ベクトル・テンソル

佐 藤　光

## 5.1 ベクトル空間の座標変換

物理量には温度のように，単位の他に1個の数値で表されるもの，速度のように大きさと方向を持っており，3つの数値の組で表されるもの，あるいは応力のように，力の大きさと方向のほかに，それがはたらく面の情報をも持ったものなど，様々なものがある．これらの物理量は，座標軸のとり方を変えたときにそれらがどのように変換するかという観点から統一的に扱うことができる．これが本講の主題である．

物理現象が生起するわれわれのまわりの空間は3次元空間であり，通常はユークリッド幾何の公理が成り立つユークリッド空間であるとしてよい．速度，加速度，力など，いわゆる大きさと方向とを持つ物理量はこの空間でのベクトルであり，第4講4.3節で述べたように，これらの3次元ベクトル全体はベクトル空間を作る．この空間の基本ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

とすれば，これらは3次元ベクトル空間の一つの基底である．このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はその成分により

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.2}$$

と書ける．2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned} \tag{5.3}$$

と定義すれば，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さは

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} \tag{5.4}$$

で与えられる．ただし (5.3) 式で $\boldsymbol{x}^T$ は 3 行 1 列の縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置行列，すなわち横ベクトル $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ を表している．内積が (5.3) 式によって定義されれば，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角 $\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \tag{5.5}$$

によって定義される．このように内積あるいは距離の定義されたベクトル空間を**計量ベクトル空間**という．

(5.1) 式で与えられる 3 次元ベクトル空間の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は互いに直交し，長さが 1 である．このようなベクトルの集まりを **正規直交系**といい，正規直交系からなる基底を **正規直交基底**という．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ からなる正規直交基底はベクトル空間の一つの直交座標系を定める．一般の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は，それに対応した直交座標系を定め，この基底による展開式

$$\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3 \tag{5.6}$$

の係数 $x'_1, x'_2, x'_3$ はこの座標系に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分である．

さて，ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ 自身はまた正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ で表されるから，1 次結合の係数を $U_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= U_{11}\boldsymbol{e}_1 + U_{21}\boldsymbol{e}_2 + U_{31}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{u}_2 &= U_{12}\boldsymbol{e}_1 + U_{22}\boldsymbol{e}_2 + U_{32}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{u}_3 &= U_{13}\boldsymbol{e}_1 + U_{23}\boldsymbol{e}_2 + U_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{5.7}$$

と書くことができる．$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ および $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が正規直交基底であることから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j &= \sum_{k,l} U_{ki}U_{lj}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l = \sum_{k,l} U_{ki}U_{lj}\delta_{kl}\\ &= \sum_k U_{ki}U_{kj} = \delta_{ij}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

係数 $U_{ij}$ の作る行列を

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ U_{21} & U_{22} & U_{23}\\ U_{31} & U_{32} & U_{33}\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

と表せば，(5.8) 式は，単位行列を $E$ として

$$U^TU = E, \quad U^T = U^{-1} \tag{5.10}$$

と表される．$U^T$ は (5.9) 式において行と列を入れかえて得られる行列で，**転置行列**と呼ばれる．(5.10) 式のように，転置行列が逆行列に等しいような行列 $U$ を **直交行列**という．かくして正規直交系を別の正規直交系に変換するような変換行列は直交行列であることがわかった．

正規直交基底が (5.7) 式のように直交行列 $U$ によって変換されたとき，ベク

トル成分の方はどのように変換されるだろうか．(5.2) 式と (5.6) 式とから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2 + x_3'\boldsymbol{u}_3 \\ &= x_1'\sum_i U_{i1}\boldsymbol{e}_i + x_2'\sum_i U_{i2}\boldsymbol{e}_i + x_3'\sum_i U_{i3}\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

となる．この式で各 $\boldsymbol{e}_i$ の係数を比べることにより

$$\begin{aligned} x_1 &= U_{11}x_1' + U_{12}x_2' + U_{13}x_3', \\ x_2 &= U_{21}x_1' + U_{22}x_2' + U_{23}x_3', \\ x_3 &= U_{31}x_1' + U_{32}x_2' + U_{33}x_3' \end{aligned} \tag{5.12}$$

を得る．行列の記法で表せば

$$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x}' = U^{-1}\boldsymbol{x} \tag{5.13}$$

となる．これがベクトルの成分の変換式である．(5.13) 式のような直交行列による 1 次変換を**直交変換**という．

2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積は一般の直交変換 $R$ のもとで不変である．実際に $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}' = R\boldsymbol{y}$ とすれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}^T R^T R\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{5.14}$$

である．一般に基底の直交変換のもとで，その成分が (5.13) 式のように変換するものを**ベクトル**と呼び，基底の変換に対して不変な量を**スカラー**と呼ぶのである．この意味で 2 つのベクトルの内積はスカラー積とも呼ばれる．

## 5.2 テンソル

ベクトル空間の基底の変換は対応する直交座標系の変換でもある．(5.7) 式と (5.13) 式で $U$ を $R^{-1}$ と置き換えれば，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とは基底の直交変換

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_k R^{-1}_{ki}\boldsymbol{e}_k \tag{5.15}$$

のもとでその成分が

$$x_i' = \sum_j R_{ij}x_j \tag{5.16}$$

と変換する量として定義される．このとき $\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_i x_i'\boldsymbol{u}_i$ であるから，ベクトル $\boldsymbol{x}$ 自身は座標軸のとり方によらない量である．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ は 3 個の基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対して成分 $x_i$ を持つ量である．これを拡張して 9 個の基底 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ に対して成分 $t_{ij}$ を持つ量 $\boldsymbol{t} = \sum_{ij} t_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ を考える．2 つの添字を持つ 9 つの量 $t_{ij}$ は座標系の変換 (5.15) のもとで次の

ように変換するものとする．

$$t'_{ij} = \sum_{k,l} R_{ik} R_{jl} t_{kl}. \tag{5.17}$$

このとき $\sum_{ij} t_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \sum_{ij} t'_{ij} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j$ が成り立つから $\boldsymbol{t}$ は座標軸のとり方によらない量となる．このような量を 2 階の**テンソル**といい，個々の $t_{ij}$ をテンソルの成分という．同様にして $n$ 個の添字を持つ量 $t_{i\cdots j}$ が

$$t'_{i\cdots j} = \sum_{k,\cdots,l} R_{ik} \cdots R_{jl} t_{k\cdots l} \tag{5.18}$$

の変換性を持つとき，$t_{i\cdots j}$ を成分とする量を $n$ 階のテンソルといい，簡単にテンソル $t_{i\cdots j}$ と表す．**テンソルとは，それが持っている 1 つ 1 つの添字に関して一定の変換性を示す量の総体のことである．** ベクトルは 1 階のテンソル，スカラーは 0 階のテンソルと考えることができる．1 階と 2 階のテンソルは行列による表示が可能であるが，3 階以上のテンソルは当然のことながら行列による表示はできない．

**応力テンソル**

テンソルの例として応力テンソルを考えよう．流体や固体などの連続体に，それを変形させるような力が外から加わっているとき，物体の内部は一種の緊張状態にある．このとき図 5.1 のように物体の内部に仮想的な平面 S を考えると，その両側の部分は互いに力を及ぼしあっている．物体内の隣接する部分間で，その境界面 S の単位面積あたりにはたらく力を**応力**という．平面 S の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，法線ベクトルの向いている側を正の側とする．このとき，点 P を含む単位面積を通して平面 S の正の側に向かう力を $\boldsymbol{T_n}$ とすれば，$\boldsymbol{T_n}$ は点 P における応力を表している．このように応力はその点を通る境界面としてどういう向きの面を考えるかに依存している．$\boldsymbol{T_n}$ を**応力ベクトル**という．

いろいろな方向 $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{T_n}$ がどのように与えられるかを見るために，点 P において $x_i$ 軸に垂直な平面を通してはたらく応力ベクトルを $\boldsymbol{T_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ としよう．たとえば $\boldsymbol{T_1}$ は $x_1$ 軸に垂直な $x_2$–$x_3$ 面を通してはたらく応力ベクトルである．ここで図 5.2 のように平面 S における微小な △ABC の面積を $\Delta S$ とすれば，△ABC を 3 つの座標平面へ射影した面積は

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n} \Delta S = n_1 \Delta S, \\ \Delta S_2 &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n} \Delta S = n_2 \Delta S, \\ \Delta S_3 &= \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{n} \Delta S = n_3 \Delta S \end{aligned} \tag{5.19}$$

で与えられることに注意しよう．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分 $n_1, n_2, n_3$ を $\boldsymbol{n}$ の方向余弦という．たとえば図 5.2 で $\Delta S_1$ は $x_1$ 軸に垂直な △OBC の面積に等しい．点 P を含む微小な △ABC にはたらく力は $\boldsymbol{T_n} \Delta S$ であるから，これを $\boldsymbol{T_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ 方向の力に分解することにより，

$$\boldsymbol{T_n} \Delta S = \boldsymbol{T_1} \Delta S_1 + \boldsymbol{T_2} \Delta S_2 + \boldsymbol{T_3} \Delta S_3 \tag{5.20}$$

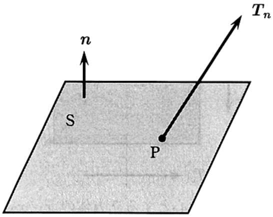



図 5.1　物体内部の仮想的な平面 S.

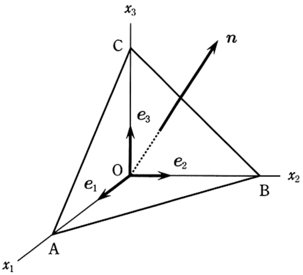



図 5.2　物体内部に考えた座標面.

が得られる．(5.19) 式の関係を用いれば，(5.20) 式は

$$\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{T_1} n_1 + \boldsymbol{T_2} n_2 + \boldsymbol{T_3} n_3 \tag{5.21}$$

となる．応力ベクトル $\boldsymbol{T_i}$ の成分を $T_{i1}, T_{i2}, T_{i3}$ と表せば，(5.21) 式は行列の記法を用いて

$$\begin{bmatrix} T_{n1} \\ T_{n2} \\ T_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

と書ける．これを簡潔に表せば次の式が得られる．

$$T_{ni} = \sum_j T_{ji} n_j. \tag{5.23}$$

さて，基底の変換 (5.15) に対してベクトルは (5.16) 式のように変換するから，この座標変換に際しての応力ベクトルの変換は

$$\begin{aligned} T'_{ni} &= \sum_k R_{ik} T_{nk} = \sum_{k,l} R_{ik} T_{lk} n_l \\ &= \sum_{k,l,j} R_{ik} T_{lk} R^{-1}_{lj} n'_j = \sum_j T'_{ji} n'_j \end{aligned} \tag{5.24}$$

となる．ここで

$$T'_{ji} = \sum_{k,l} R_{ik} T_{lk} R^{-1}_{lj} = \sum_{k,l} R_{ik} T_{lk} R_{jl} \tag{5.25}$$

とおいた．この関係は座標変換に際してのテンソルの変換則 (5.17) 式に他ならないから，(5.22) 式あるいは (5.23) 式の $T_{ji}$ は 2 階のテンソルであることがわかる．これを**応力テンソル**と呼ぶのである．(5.24) 式は (5.23) 式と同じ形をしており，変換後の新しい座標系での応力ベクトルと法線ベクトルとの関係を与える．一般に方程式や関係式をテンソル間の等式の形に表しておけば，左辺も右辺も座標変換に対して同じ変換を受けるから，それらはどんな座標系で

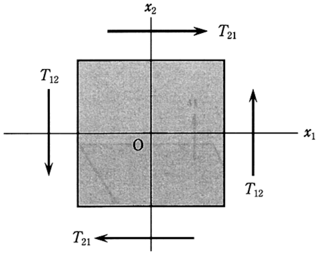



**図 5.3** 点 O を中心とする立方体の $x_1$–$x_2$ 面での断面.

も同じ形をとる．これを方程式あるいは関係式の，座標変換に対する**共変性**という.

応力テンソルの成分 $T_{ji}$ は $x_j$ 軸に垂直な面を通してはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{T_j}$ の $x_i$ 成分という意味を持っている．したがって $T_{jj}$ は面の法線方向の成分であり，**法線応力**を表している．また，$T_{ji}$ $(j \neq i)$ は面の接線方向の成分であり，**接線応力**を表している．物体内部の点 O を中心とする微小な立方体を考えれば，たとえば $T_{12}$ と $T_{21}$ は図 5.3 のように物体を $x_3$ 軸のまわりにそれぞれ逆方向に回転させようとするから，力のモーメントのつりあいより，$T_{12} = T_{21}$ でなければならない．同様にして，$T_{13} = T_{31}, T_{23} = T_{32}$ が成り立つ．一般に 2 階のテンソル $T_{ji}$ において，その成分の間に $T_{ji} = T_{ij}$ が成り立つとき，これを**対称テンソル**といい，$T_{ji} = -T_{ij}$ が成り立つとき，**反対称テンソル**という．応力テンソルは対称テンソルである.

対称テンソルの成分は対称行列によって表される．第 4 講 4.4 節では行列の対角化について学んだが，特に対称行列については次の重要な定理が成り立つ.

**定理 5.1** 任意の対称行列 $A$ は適当な直交行列 $R$ による相似変換 $R^{-1}AR$ によって必ず対角化できる.

対称行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ のスカラー積

$$\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j$$

は座標軸のとり方によらない．これは $\boldsymbol{x}$ の成分 $x_1, \cdots, x_n$ の同次 2 次式であり，**2 次形式**と呼ばれる．行列 $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を対角成分とする対角行列を $A_D$ とし，$A$ を対角化するような直交行列 $R$ に対して $\boldsymbol{y} = R^{-1}\boldsymbol{x}$ とすれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^T R R^{-1} A R R^{-1} \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{y} \cdot A_D \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned} \tag{5.26}$$

となる．これらの事柄を対称テンソル $\boldsymbol{T}$ に応用してみよう．テンソル成分の

行列 $T_{ij}$ を対角化する直交変換を $R$ とすれば，(5.26) 式と同様にして

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x} &= T_{11}x_1^2+T_{22}x_2^2+T_{33}x_3^2+2T_{12}x_1x_2+2T_{13}x_1x_3+2T_{23}x_2x_3 \\ &= t_1y_1^2+t_2y_2^2+t_3y_3^2 \end{aligned}$$

を得る．行列 $T_{ij}$ の固有値 $t_1, t_2, t_3$ を対象テンソル $\boldsymbol{T}$ の**主値**と呼ぶ．また，直交変換 $\boldsymbol{y}=R^{-1}\boldsymbol{x}$ を**主軸変換**という．このように，主軸変換により適当な直行座標系に移ることにより，対称テンソルは常に非対角成分をゼロにすることができる．

## 5.3 ミンコフスキー空間のベクトル・テンソル

ニュートン力学の第1法則は慣性の法則とも呼ばれ，力を受けていない質点は等速度運動を続けるというものである．この法則の成り立つ座標系を**慣性系**という．1つの慣性系に対して相対的に等速度で運動している座標系もまた慣性系である．アインシュタイン（Einstein）の**特殊相対論**は次の2つの基本原理を出発点とする．

(1) **相対性原理**：基本的物理法則に関してすべての慣性系は同等である．
(2) **光速度不変の原理**：真空中の光速度 $c$ はどの慣性系で見ても同じである．

ある慣性系Kがあり，これに対して等速度で動いているもう1つの慣性系をK′とする．K系の時間と空間座標を $(t,x^1,x^2,x^3)$ と表し，K′系での時空座標を $(t',x'^1,x'^2,x'^3)$ としよう．簡単のためにK′系は $x^1$ 軸の方向に速度 $V$ で動いているとする．これら2つの慣性系を関係づける変換は上の2つの基本原理を満たすものでなければならない．このような変換を**ローレンツ変換**といい，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} &t'=\frac{t-(V/c^2)x^1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad x'^1=\frac{x^1-Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \\ &x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3. \end{aligned} \tag{5.27}$$

ローレンツ変換では (5.27) 式のように時間座標と空間座標とが変換によって互いに混じり合う．したがって特殊相対論では時間と空間に本質的な差はなく，これらを同等に扱わなければならない．こうして導入されたのが**ミンコフスキー空間**である．

ミンコフスキー空間では時間座標は $x^0=ct$ として定義され，この空間の点の座標は $(x^0,x^1,x^2,x^3)$ で表される．ローレンツ変換 (5.27) はミンコフスキー空間での1次変換

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

として表される．ただし，

$$\cosh\xi = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad \sinh\xi = \frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{5.29}$$

とおいた．$\cosh\xi, \sinh\xi$ は**双曲線関数**と呼ばれ，次のように定義されるものである．

$$\cosh\xi = \frac{1}{2}(e^{\xi}+e^{-\xi}), \quad \sinh\xi = \frac{1}{2}(e^{\xi}-e^{-\xi}). \tag{5.30}$$

この定義からすぐにわかるように，次の関係式が成り立つ．

$$\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1. \tag{5.31}$$

ミンコフスキー空間のベクトル全体は 4 次元のベクトル空間を作り，その基底を $\boldsymbol{f}_\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ とすれば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{f}_0 + x^1\boldsymbol{f}_1 + x^2\boldsymbol{f}_2 + x^3\boldsymbol{f}_3 \tag{5.32}$$

と表される．$x^\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ は基底 $\{\boldsymbol{f}_\mu\}$ でのベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分である．このようにミンコフスキー空間では基底 $\boldsymbol{f}_\mu$ の添字は下つきに，ベクトルの成分 $x^\mu$ の添字は上つきに区別して表すことにする．

2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積は

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu \boldsymbol{f}_\mu\cdot\boldsymbol{f}_\nu = \sum_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} \tag{5.33}$$

と書けるから，内積を定義することは

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{f}_\mu\cdot\boldsymbol{f}_\nu \tag{5.34}$$

を与えることと同値である．一般に与えられた基底に対する $g_{\mu\nu}$ がわかれば，それを用いてベクトルの長さや角度という幾何学的な量を“計る”ことができるので，$g_{\mu\nu}$ を**計量**と呼ぶ．$g_{\mu\nu}$ の与えられたベクトル空間が計量ベクトル空間である．ミンコフスキー空間での計量は

$$g_{00} = 1;\ g_{ii} = -1, i = 1,2,3;\ g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu \tag{5.35}$$

と定義され，ローレンツ計量と呼ばれる．($g_{00} = -1, g_{ii} = 1$ と定義する方式もある．）これに対して 4 次元ユークリッド空間の計量は $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ である．

ローレンツ変換は一般に内積 (5.33) を不変にする変換として特徴づけられる．変換を

$$x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5.36}$$

あるいは行列の行は上つき，列は下つきの添字で表すことにより行列記法を用いて $\boldsymbol{x}' = \Lambda\boldsymbol{x}$ と表せば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{x}'^T g\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}^T\Lambda^T g\Lambda\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{x}^T g\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\end{aligned} \tag{5.37}$$

が内積不変の条件である．したがって，ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ は一般に

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad あるいは \quad \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{5.38}$$

を満たす1次変換である．ただし，ここで**アインシュタインの縮約規則**を用いて和記号を省略した．この規則は上つきと下つきの同じ添字の対が現れたときには，その添字に関して和をとるものとし，和記号を省くというものである．以後，特に断らない限りこの縮約規則を用いることにする．(5.28) 式のローレンツ変換が (5.38) 式を満たすことは容易に確かめられる．

ローレンツ変換によるベクトル成分の変換 (5.36) に対して，基底は

$$\boldsymbol{f}'_\mu = \boldsymbol{f}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{5.39}$$

と変換される．このようにすれば $\boldsymbol{x} = x^\mu \boldsymbol{f}_\mu = x'^\mu \boldsymbol{f}'_\mu$ であるから，ベクトル $\boldsymbol{x}$ 自体は当然変更を受けない．次に下つきの添字を持った量を $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ によって導入しよう．この量はローレンツ変換に対して次のように変換する．

$$\begin{aligned} x'_\mu &= g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu g_{\sigma\rho} x^\rho = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu. \end{aligned} \tag{5.40}$$

ここで (5.38) 式より得られる関係 $g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu g_{\sigma\rho}$ を用いた．(5.40) 式より下つき添字の量 $x_\mu$ は基底と同じ変換をすることがわかる．このような変換性を持つ量を**共変ベクトル**と呼び，(5.36) 式のような上つき添字の変換性を持つ量 $x^\mu$ を**反変ベクトル**と呼ぶ．また，ローレンツ変換で不変な量はスカラーと呼ぶ．

一般にローレンツ変換においても変換する上下の添字を持つ量の集まりをテンソルといい，その添字の個数をテンソルの階数という．$A_{\mu\nu}$ は2階の共変テンソル，$A^{\mu\nu}$ は2階の反変テンソルである．$A^\mu{}_\nu$ は2階の混合テンソルと呼ばれる．高階のテンソルも同様にして考えることができる．

ユークリッド空間では基底を正規直交系にとれば計量は $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ であるから，$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu$ となり，添字の上つき，下つきの区別が生じない．これが5.1, 5.2節で添字の上つき，下つきを区別しなかった理由である．

次回は「ベクトル解析と場」について学ぶ．

### 参考文献


1) 荒木不二洋著：線形代数の基礎と応用（新数理ライブラリ M1，サイエンス社）．
2) 渡辺　正著：ベクトル解析の基礎と応用（新数理ライブラリ M5，サイエンス社）．
3) 風間洋一著：相対性理論入門講義（培風館）．


（さとう・ひかる，兵庫教育大学学校教育学部）

研究室の窓

# ロボットの認知発達

浅田　稔

## 1. はじめに

最近，TVなどでロボットの特集番組が多い．H社の人間型ロボットやS社の犬型ロボットなど，後者は一般消費者に渡ったという意味で画期的である．人間型をはじめとして，動物に似たロボットは，受け手側に，最初から行動をイメージさせ，それに合えば合ったで，合わなければそれなりに新鮮な感動を与えているようである．このような姿を目のあたりにすると，近い将来，SF映画やアニメで活躍するロボットが我々の身近に現れてくると期待されるが，実際どれくらい可能であろうか？　もちろん，クリアすべき現状の様々な技術的課題はあるが，筆者は，それらに加えて，ロボットの認知発達過程を重要視した「認知発達ロボティクス」のアプローチの必要性を唱えたい．

「認知発達ロボティクス」の根幹をなすロボットの属性として，「身体性」が挙げられる．知能の発現・発達に「身体」が必要であることは，最近，コンピュータサイエンスの研究者の間でも市民権を得てきたようである．ロボティクスの分野では，当たり前かといえば，実はそうでも無かった．物理的な実体としてのロボットを扱っていたとしても，これまでのロボティクスでは，ロボットに求められる様々な機能を，限られた環境で動作可能であるように，設計者が明示的な行動としてロボットに書き込んできた．このため，ロボットはそれを再生するのみであった．すなわち，身体を持つことによる様々な可能性を，静的な行動プログラムで押し潰してしまい，環境に適応するための「知能」は，行動を決定した設計者側のものであり，ロボット自身が獲得したものではなかった．ロボットが，様々な状況や環境の変動に対して，適応するためには，ロボット自身が自らの経験から学ぶ必要があり，呈示される環境もそれに見合った物でなければならない．

筆者の興味は，環境との相互作用を通して，世界をどのように表現し行動を獲得していくかといった，ロボットの認知発達過程にある．特に，環境因子として他のエージェント（人や他のロボット）の行動が自分の行動をどのように規定していくかという過程の中に，ロボットが「自我」を見出していく道筋が解釈できるのではないかという期待がある．このように，環境との相互作用をベースとして，その時間的発展に焦点をあて，ロボットの内部構造の設計論と共に環境の設計問題を扱う研究分野が「認知発達ロボティクス」である．その基本的な考え方は，問題自体に対する理解の過程をロボット自身が，環境との相互作用を通じて経験することにより，様々な状況に対応可能なメカニズムを構成論的アプローチによって構築することである*1)．

では，「身体性」とはなにか？　本稿では，この問題を今一度復習し，知能を発現するロボットの設計論として，内部構造のみならず，外部環境設計論の重要さを指摘する．これらの設計論は，人工システムに限らず，自然知能の理解にも役立つと考えたい．以下では，最初に「身体性」に代表される「認知発達ロボティクス」の基本的な考え方を述べ，環境設計の観点から現状の技術紹介並びに今後の課題を探る．

*1)　浅田，石黒，国吉は，ロボットの認知プロセスを理解し，具体的メカニズムとして具現することを目指す「認知ロボティクス」の必要性を唱えている[1)]．認知発達ロボティクスは，認知ロボティクスとほぼ同じ趣旨だが，時間的発展により重きをおいている．

## 2. 認知発達ロボティクスが目指すこと

### 2.1 ロボットの身体性

ロボットで「身体」とは当たり前すぎると思われるかもしれないが，ロボットが「経験，学習，発達」するために，身体を持っているということ，すなわち「身体性」が重要である．ロボットの身体性は，以下を意味する．

1. 様々な環境やその変動及び，ロボット自身の内部状態を感知できる感覚能力，環境に働きかける多様な運動能力，それらを結ぶ情報処理能力は不可分であり，密に結合していること（不可分性）．
2. 限られた資源（感覚の種類や能力，運動能力）や処理能力の範囲で目的を達成するために，知覚・運動空間の関係を経験（環境との相互作用）を通じて学習できること（学習可能性）．
3. 達成すべき目標や環境の複雑さの増大に対して，適応的に対処できるように，学習結果の経時的発展（発達）を可能にすること（発達可能性）．

これらのことを示す興味ある実験は，生後 2 週間の 2 匹の仔猫の生理実験（図 1 参照）である[2]．一匹は自ら歩行し，もう一匹は自ら歩行できない状態で，同じ視覚入力を与えた場合，前者が正常な奥行き知覚を構成できるのに対し，後者は正しく視覚入力を解釈できず，正常な奥行き知覚が構成されないといわれている．このことは，感覚入力を正しく理解するには，自らの能動的な運動入力が不可欠であること（不可分性），それらの関係を学習できること（学習可能性）が大事である．更に，自ら歩行していない仔猫も，ゴンドラから取り出して，歩けるような環境を与えれば，正しい知覚が構成される（可塑性（再学習可能性）と発達可能性）．

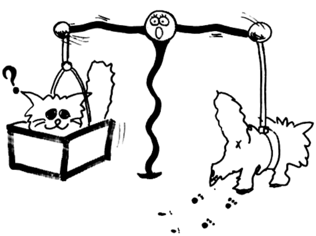



図 1　2 匹の仔猫の生理実験．

### 2.2 認知発達から言語創発へ

身体性の本質は，物理的実体として限られた処理能力の範囲で，主体の「多様な感覚情報」,「多自由度の運動能力」に基づき，タスクや環境の複雑さに適応するために学習及びその経時的発展を可能にすることである．この意味では，時間的発展，すなわち発達の結果が，知的行動であることを期待するが，保証はない．つまり内部構造をいくら作り込んでも，よい方向に変化（発達）すべき環境が与えられないかぎり，知能が発現するとはいえない．この意味で外部環境の設計は重要である．このことは，上記の 3 点が陽にはロボットの内部構造に関する要件を述べているように見えながら，同時に提示されるべき外部環境の条件を陰に示していることに注意しなければいけない．特に，知的行動をヒトのレベルまで求めるなら，ヒト以外の動物にも可能な連合学習から，ヒト特有のシンボル生成／利用の記号学習，すなわち言語獲得にいたる過程（言語創発）が，ロボットの内部構造と外部環境の多様かつ制約的相互作用のなかに見いだされなければならない．

現状では，言語創発に至る過程までの記号学習*2)が可能な内部構造と外部環境の設計指針は明らかではない．もちろん，これがわかれば言語のミッシングリンクが埋まると考えられるほどの大きな問題なので一朝一夕には，とうてい無理だが，認知発達ロボティクスの設計論から，この大問題の解決の糸口が提言できることを期待したい．

### 2.3 他者の存在の認知

ネズミの発達の実験で，広い環境で比較的多くのネズミと接しながら成長する場合と，狭い環境で比較的少数のネズミとしか生活を共にしないネズミの成長との比較[3]で，明らかに前者が後者より脳の発達が活発で，行動の多様性が見られたと報告されている．このことは，環境の多様性が脳の発達に多大な影響を与えている例である．ロボットが環境との相互作用を通じて知的な行動を獲得していく過程においても，環境の多様性が獲得される行動の多様性や複雑度に関連する可能性は十分にあると考えられる．つまり，知能のレ

*2)　通常，古典的 AI のセンスでのシンボル操作は，シンボルが本来の意味でのセマンティクスを内包していない点で，ここで目指す記号学習とは呼ばない．セマンティクス創出は，身体性の最も際だった特徴の一つである．

ベルが，環境との相互作用の複雑性にあるとすると，視覚を基にした環境との相互作用をベースとする我々の研究でも，他者の存在が，複雑さを増すであろうことや，自己の規定などに関する議論が可能と考えられる．

1. **自己の身体**：運動機能を有する主体が，運動指令と視覚情報との直接的な相関がとれる場合（例えば，他の多くの人たちと手のひらを重ね合わせた状況を観測していて，自分の手を発見するとき，自分の手をちょっと動かすだけでわかる.），すなわち，運動指令を発した自己の運動結果が視覚で確認され，運動指令を出した自己を裏切らない範囲が自己と規定し得る範囲であろう．入来による[4]サルの道具使用の実験で，サルが道具を利用するとき，道具を自分の身体と見なす行為も同様に解釈可能である．
2. **静止環境**：自己の運動との直接的な相関により，切り出し可能．（静止環境に対するオプティカルフローは，視線を変えた方向と逆方向に流れる.）切り出せれば制御可能．全ての運動は相対的なので，「静止環境」と「自己の身体」との区別は容易ではないが，重力方向などによる他の参照座標系との関係から，識別可能となる．
3. **受動エージェント**：自己や他者の運動の帰結により，静止環境内で運動したり，停止したりするもの．自らは状態変化を起こさないもの．ロボカップでは，ボールが相当する．
4. **他の能動エージェント**：直接的には，自己の運動との単純な相関を持たない．大澤[5]の意味では，自己を否定する可能性のあるもの．視覚情報からの相関では，単純な相関を持たないものとして，最初，排他的に扱われるが，自己の運動との高度な相関（協調，競合，干渉）により，規定される対象．行動選択の複雑さは一挙に増す．

### 2.4 認知発達ロボティクスの設計論

認知発達ロボティクスの具体的な設計論は，二つに分かれる．一つは，身体を通じて，行動するための環境表現を構築していくロボットの内部の情報処理の構造を設計すること，二つ目が，そのように設計されたロボットが上手に学習や発達できるような環境を設計することである．両者は密に結合することで，相互の役割である学習・発達が可能であるが，説明のために便宜上分けて考えていく（図２参照）．

ロボットの頭の中に作る内部構造は，環境との相互作用を効率よく表現するためのメカニズムである．一例として，知覚から運動へのマッピングである強化学習を説明する．図３に簡単な原理図を示す．ネズミを箱のなかにいれ，そのなかにあるレバーをネズミがたまたま押すと，餌がもらえる実験で，一旦レバー押しを憶えると何回もレバーを押し続ける行動をとるそうである．このときレバーを押す行為に正の強化（餌，報酬，価値などなど）が与えられるという仕組みである．強化学習法は，これをコンピュータプログラムで実現可能なよう構成し直し，ロボットにも応用できるようにしたものである．

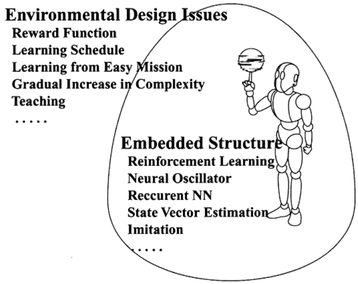


図２　認知発達ロボティクスの概念：内部構造と外部環境設計．

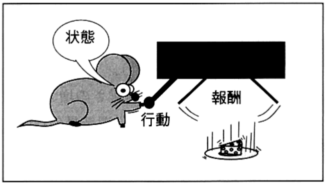


図３　強化学習（スキナーボックス）の原理．

ネズミは箱の中で，どこにいたり，レバーがどのように見えるかなどの環境の**状態**が識別でき，それにより，前に進んだり，レバーを押すなどの**行動**をとることができる．このとき，現在の状態とネズミがとった行動により確率的に（うまく見えなかったり，脚を滑べらせたりするかもしれないので）**次の状態**に移り，その結果として**報酬**（例えばチーズ）が与えられるとする．各種の行動によりどのように状態が変化していくかが事前にわかれば，最終目標に到達できるように計

画が立てられる．しかし，環境が未知のときは，様々な試行を繰り返して探索し，望ましい（積算報酬が高くなる）行動を獲得する．詳細は文献6) などを参照されたい．

学習を進める環境設計のポイントは以下の二つが考えられている．

1. 学習環境内における学習者や物体の空間的配置やその時間的変化，いわゆる学習スケジューリング．非明示的介在．
2. 親が子供に直接教えたり，子供が見よう見まねで親の行動を再現するなど，他者の明示的介在によって学習していく場合．明示的介在．

2 は教示を意味するが，ロボットの脳に直接書き込むのではなく，環境を介して，ロボット自身が自らの身体を通じて，情報を取得し，情報を解釈していく過程を持つことが重要である（身体性）．

## 3. ロボカップを題材とした認知発達例

日常環境をロボットの認知発達の研究対象とするには，あまりに困難なので，基本問題を含みながらも，我々の手の届く範囲での対象がないかと考案したのが複数ロボットによるサッカー競技の実現であるロボカップである[7]．以下では，ロボカップを題材にいくつかの例を示そう．

### 3.1 学習・発達する 2 台のロボットの例

強化学習をサッカーロボットのパスとシュートの協調行動に適用した例を紹介する（図 4 参照）[8]．複数ロボット環境における学習の基本的な問題点は，学習者が一人であったとしても，他のロボットの行動政策が未知の場合，学習できる識別可能な状態を容易に発見できないことである（相手は，自分のとった行動に関係なく動くかもしれないので因果関係がわからず学習不能）．そこで，観測のみによって対象のモデルを推定するのではなく，自分の行動との関わりを通じて，対象の動きを予測する（身体性：不可分性）．この結果，自分との関わり（ゴール，ボール，敵，味方，審判など）が判別可能となる．すなわち，2.3 節で示したカテゴリー識別が学習されたことに対応する．次に推定された状態モデルをもとに，協調行動獲得のための学習を開始する．ここで，状態モデル推定及びそれに基づく強化学習機構が内部構造設計である．



図 4　パッサーとシュータの協調行動．

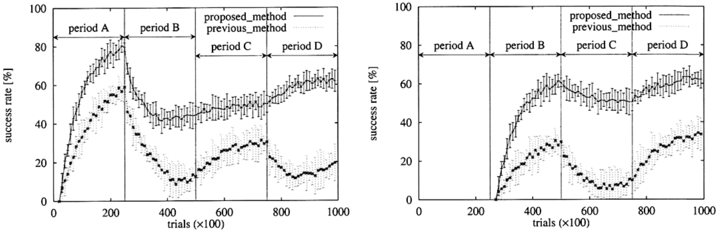
いくら学習機構を備えていても，何も知らない全くの素人 2 人が練習してもうまくならない．それは，互いに学習しているため，相手のモデルが確定しないからである（非定常環境）．そこで，一方が学習中は他方は行動政策を固定化し，学習がそこそこ収束したら交代する．これを繰り返して，徐々に互いにスキルアップしていく．そこそこうまくなったら，同時に学習することで，学習時間の短縮を図る．これが環境設計の一手法である学習スケジューリングである．

図 5 に，学習結果の図を示す．ピリオド A, B, C, D で，交互に学習，非学習のフェーズを経験する．A では，パッサーが静止状態のシューター（非学習者）に向けて学習する．B では，シューターがシュートの学習をする．このとき，パッサーは，A での静止状態のシューターに対する学習結果に基づいて，パスするので，その成功率は低下する．C では，逆にシューターが B におけるパッサーの行動に対する学習結果に基づいてた行動をとるため，シュート成功率が落ちる．パッサーは，それに対して学習する．D では，また交替する．交互の学習している様子が窺える．図中 previous は，状態モデルの推定を含まない従来手法の結果で，これとの比較から，推定による学習の効果が窺える．

実環境での試行回数は高々数百回であり，シミュレーションに比して，2 桁ほど落ちるが，すでにシミュレーションで獲得した行動政策を実環境での初期政策として用いるので，シューターとパッサーの同時学習が可能となり，更なる探索時間の減少に貢献している．このようにして，シミュレーションと実機の実験を有機的に結びつけ，実機での学習の効率化が図られている．

環境設計としては，

1. 各エージェントのタスクの割りあて，




(a) パス行動　　(b) シュート行動

**図5**　学習結果：パッサーとシューターが互いに徐々にスキルアップしている．

2.　状態ベクトル推定のための多様な行動の再現（初期配置など），
3.　学習者と非学習者の交代スケジューリング，
4.　シミュレーションと実機との結合のスケジューリング

が挙げられる．課題として，より多くのエージェントが存在する場合，エージェント間の相互作用の複雑さに後段の Q 学習では対応が困難となると予想される．更に，学習者が一人なので学習時間が増大する．この意味でも，初期のシミュレーションの効用は大きい．

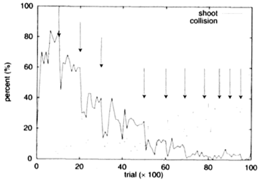
### 3.2 他者の行動制御による学習スケジューリング

明示的に他者の行動を制御するという意味では，ゴールキーパーを対象として，シューターがシュート行動を獲得する過程中に，ゴールキーパーの行動を制御して学習を高速化する手法が提案されている[9]．最初に，先と同様の手法を用いて，シューターの状態ベクトルを推定する．最初から，状態ベクトル空間を最も複雑なものにする（上手なゴールキーパーに対応するために高いベクトル次数）と，学習の収束が遅い（図 6 (b) 参照）．逆に，下手なゴールキーパーにのみ対応可能な状態ベクトルだけでは，収束は早いが，低いレベルで落ち着いてしまう（図 6 (a) 参照）．そこで，最初から状態ベクトルを複雑なものにするのではなく，主要な成分から順次加えていくことで，効率よく探索できるよう，そのタイミングを制御した（図 6 (c) 参照）．動物学とのアナロジーでいえば，「臨界期」に相当する環境因子の変化時期をどのように設計するかという問題と考えられる．なお，図で，垂直の短い矢印は，学習者の最大速度に対して，ゴールキーパーの速度を 0 から 10%ずつ増加させたタイミングを示す．図 6 (c) の長い矢印は，次元を上げたタイミングを示す．この場合，成功率が 50%を下回った場合，次元を一つずつ上げる．下回らない限り，速度を 10%ずつ上げた場合の結果である．

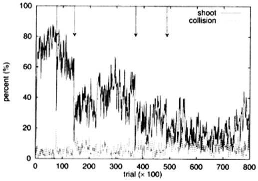
## 4. 教示者の明示的介在：社会的相互作用とコミュニケーション

これまで述べてきた環境設計の方針は，学習エージェントを設計者から独立存在としてとらえ，学習者の外環境を設定することで，学習を加速化してきた．学習者が自らの経験により，望みの行動を獲得すべきという基本方針に従ったもう一つの方法として，教示者が明示的に介在して，学習を高速化することが考えられる．すなわち，学習者への教示による直接行動の指示である．これはまた，人や他のロボットが学習過程に直接介在する意味で，ロボットの社会的相互作用そしてコミュニケーションの問題が背景にある．これが，認知発達ロボティクスが新たな人間理解のモデルを提供できる可能性である．すなわち，多自由度・多感覚の人間型ロボットを使って，コミュニケーション発達に内在する認知・社会的過程のモデルを検証することが期待される．

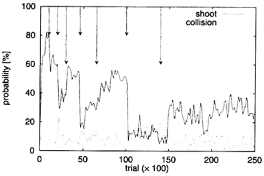
非言語的コミュニケーションから言語コミュニケーションに至る過程は，認知発達ロボティクスが積極的に扱うべき領野であり，霊長類とヒトのギャップを埋めるべくミッシングリンクである[10]．過去数十年を見ると言語学では，ヒトは言語器官（“language faculty” または “language device”[11]）を生まれながらにして




(a) 固定状態ベクトル (次元 $n=1$)




(b) 固定状態ベクトル (次元 $n=4$)




(c) 可変ベクトル

図 6　固定学習と漸次学習の結果の比較.

持っていると結論されているようである．但し，霊長類からヒトへの連続性を考えると，生物学的には受け入れ困難なようである．当然，ヒトは何かを持って生まれてくることは確かだが，認知発達ロボティクスとしては，それが明示的か非明示的にかかわらず，どのような構造のものかが設計論として明示されねばならない．それは，進化や発達が，非言語コミュニケーションと言語コミュニケーションのギャップを埋めることを示す新たな説明が内包されていなければならない．更に，どのようなアプローチ（構造的/解剖学的．行動学的，進化的）を用い，どのレベル（遺伝子，ニューロン，聴覚システム）で始めるべきかが，認知発達ロボティクスに突きつけられた課題である．

他者との関わりの最も根元的な形態は，「模倣」であろう．Schaal[12] は，最近の発見であるミラーニューロンに言及して，模倣学習の重要性を説き，特に人間型ロボットであるヒューマノイドを発達（開発？）させる道筋であると主張している．ミラーニューロンは，サルの前運動野で発見されたニューロンで，サル自身が自分である行動，例えば，物をつまんだり，紙を破ったりすると，それぞれの行為に対するミラーニューロンが発火するが，他のサルや人が同じ行為をしたときも，発火する．Rizzolatti and Arbib[13] は，行為を模倣できることがその行動の理解に繋がり，ひいては相手の意図理解に至る過程（コミュニケーションの発生）に発達するのではという仮説を立てている．というのも，ヒトでも同様のシステムが音声生成に深く関わっているブロッカ領野を含んでいるからである．

認知発達ロボティクスの観点からは，コミュニケーションを創発させる上で，行為模倣及び行為理解能力は，設計論として考慮されねばならない．従来の模倣手法（例えば，文献 14～16)）では，神の視点による全体座標系への変換を事前に想定してきた．すなわち，教示者の行動は，3 次元再構成され，全体座標系から学習者へ座標変換され，学習者が再生することを意味する．しかしながら認知発達ロボティクスでは，そのような変換が，人とヒューマノイドの相互作用から（ヒトの赤ちゃんが親から学び取るように）どのようにして創発されるかに焦点をあてる．Asada et al.[17] は，全体座標の概念なしに，すなわち 3 次元再構成することなく，他者の視点を再現して模倣するアプローチを示した．彼らの仮定は，他者が自分（学習者）と同じ身体構造を持っていることである（図 7 参照）．彼らは，行動生成のみならず，行動理解，意図理解に至る道筋を提供できないかと目論んでいる．すなわち心を読むこと（“mind reading”: the theory of mind[18]）である．

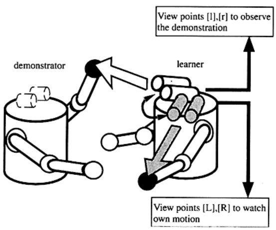



図 7　模倣システム.

## 5. おわりに

認知発達ロボティクスの基本的な考えと目標，外部環境設計を主に述べてきた．特に模倣学習は，単なる再生ではなく，何かを新たに生み出す能力を内包して

いる意味で重要である．とにかく，始まったばかりの分野ゆえ，未成熟であり議論がまだまだ尽くされていない．本稿がロボットの認知発達の新たな議論の始まりを促せれば幸いである．

## 参考文献


1) 浅田稔，石黒浩，国吉康夫．認知ロボティクスの目指すもの．日本ロボット学会誌, Vol.**17**, No.1, pp.2–6, 1999.
2) R. Held and A. Hein. "Movement-produced stimulation in the development of visually guided behaviors". *Jounal of Comparative and Physiological Psycology*, Vol.**56:5**, pp.872–876, 1963.
3) 津本忠治（編）．脳と発達．朝倉出版，1986.
4) 入来篤史．道具を使う手と脳の働き．日本ロボット学会誌，Vol.**18**, No.6, pp.28–33, 2000.
5) 大澤真幸．知能の社会性．日本ロボット学会誌, Vol.**14**, No.4, pp.485–489, 1996.
6) R.S. Sutton and A.G. Barto. *Reinforcement Learning: An Introduction.* MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
7) 北野宏明，浅田稔．「ワールドカップ」ロボットの挑戦．日経サイエンス，Vol.**28**, pp.74–82, 1998.
8) M. Asada, E. Uchibe, and K. Hosoda. Cooperative behavior acquisition for mobile robots in dynamically changing real worlds via vision-based reinforcement learning and development. *Artificial Intelligence*, Vol.**110**, pp.275–292, 1999.
9) E. Uchibe, M. Asada, and K. Hosoda. Environmental complexity control for vision-based learning mobile robot. In *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp.1865–1870, 1998.
10) T.W. Deacon. *The Symbolic Species: The co-evolution of language and the brain.* W.W. Norton & Company, New York, London, 1998.
11) N. Chomsky. *Language and Mind.* New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1972.
12) S. Schaal. Is imitation learning the route to humanoid robots? *Trends in Cognitive Science*, 1999.
13) G. Rizzolatti and M.A. Arbib. Language within our grasp. *Trends Neuroscience*, Vol.**21**, pp.188–194, 1998.
14) K. Ikeuchi and T. Suehiro. Toward an assembly plan from observation. *IEEE Trans. on R&A*, Vol.**10**, pp.368–385, 1994.
15) Y. Kuniyoshi, M. Inaba, and H. Inoue. Learning by watching. *IEEE Trans. on R&A*, Vol.**10**, pp.799–822, 1994.
16) M. Kawato, F. Gandolfo, H. Gomi, and Y. Wada. Teaching by showing in kendama based on optimization principle. In *Proc. of the International Conf. on ANN*, pp.601–606, 1994.
17) M. Asada, Y. Yoshikawa, and K. Hosoda. Learning by observation without three-dimensional reconstruction. In *Proc. of the 6th International Conf. on Intelligent Autonomous Systems (IAS-6)*, pp.555–560, 2000.
18) D. Premack and G. Woodruff. Does the chimpanzee have a theory of mind? *Behavioral and Brain Sciences*, pp.515–526, 1978.



（あさだ・みのる，大阪大学大学院工学研究科）

# 2000年 (1月号～12月号) 総目次

Vol. 38, No. 439～Vol. 38, No. 450

## ■連　載

## 特　集（2001年2月号予告）

# 微分幾何

## 応用数理，数理物理への展開

本体 952 円

| | |
|---|---|
| 微分幾何からの展開 | 深谷　賢治 |
| 数理物理と幾何学　母空間のススメ | 牛腸　　徹 |
| 微分幾何と Hamilton 系　測地流を中心として | 三松　佳彦 |
| グラフの幾何学　結晶格子の標準的実現と中心極限定理 | 小谷　元子 |
| 内点法と幾何学 | 土谷　　隆 |
| 微分幾何と計算幾何　微分幾何空間の離散構造の計算論 | 今井　　浩 |
| 線織面の微分幾何と特異点 | 泉屋周一・竹内伸子 |
| 情報幾何 | 甘利　俊一 |
| 幾何学の未来 | 中島　　啓 |

## 特　集（2000年12月号）

# 20世紀 科学革命の基礎

## 相対論，量子論から脳科学まで

本体 952 円

| | |
|---|---|
| 物理学の革命とパラダイム転換の実状 | 江沢　　洋 |
| 素粒子論　クォークへの道 | 山脇　幸一 |
| 現代ビッグバン宇宙論　20世紀宇宙論の到達点 | 杉山　　直 |
| 統計物理 | 和達　三樹 |
| 生物と脳の数理科学について　自然科学言語と人文科学言語の融合の場 | 沢田　康次 |
| 量子と情報 | 井元　信之 |
| コンピュータとシミュレーション | 小柳　義夫 |
| 《数学の未解決問題⑯》実解析　掛谷問題とコロナ問題—日本発の二つの問題— | 新井　仁之 |
| 《連載》　計算物理入門　第12回 | 上田　　顕 |
| 《研究室の窓》　スノーボール・アース現象のモデリング | 田近　英一 |

# 編集後記

「数理科学」21世紀最初のテーマは「時間」です．古今東西，科学のみならず様々な分野において，この「時間」の問題は議論されてきました．特に今回は，物理学と生命科学に焦点をあて，科学における「時間」の問題について特集を組ませていただきましたが如何でしたでしょうか．細胞や生物に宿るミクロな時間から宇宙全体に宿るマクロな時間まで，「時間」のもつ神秘さ，深遠さを改めて考えさせられました．巻頭の戸田先生の記事に出てきた，この世のすべての因果を知り尽くす「デモン」がもしも存在するならば，「数理科学」の未来も教えてもらえたら…などと，たわいもなく考えてしまった今日この頃です．（伊崎）

うちには猫がいますが，私たち人間の一日と比べると猫の一日はとてものんびりしているように見えます．もちろん，昼間私が会社にいっているときの生活はわかりませんし，もしかしたら猫にとっては忙しい毎日なのかもしれませんが，私が見る限りではほとんど寝ています．好きなだけ寝て，おなかがすくとご飯を食べ，気が向いたときに少し遊んで…，とうらやましく思うときもあるくらいです．ですから本川達雄先生の記事は，私にとっては大変興味深いものでした．その他にも細胞の寿命の話題や，また宇宙や物理学の観点から見た時間の話題を読みやすくご紹介していただきました．（中山）


**数　理　科　学　1月号**

2001年1月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

企画・編集スタッフ　平勢耕介・田島伸彦　中山幸絵・伊崎修通　竹田　直

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

# 数学テキスト好評書より(1)

## 基礎の数学

寺田文行編／A5判・240頁・本体1311円
高専および各種学校等の学生を対象に，高校における数学教育への対応など，実際の教育現場の実情にマッチしたテキスト．

## 新 教養の数学

野崎昭弘著／A5判・160頁・本体1300円
大学や短大における文科系の学生のために，教養としての数学の知識を，身近なわかりやすい例を取りあげて解説した好個のテキスト．

## 基礎 線形代数 [新訂版]

洲之内著／田中改訂／A5判・192頁・本体1600円
定評ある旧版に，体裁面で大幅な変更を加え，見た目のわかりやすさも追及した．工科系の学生には最適のテキスト．

## 線形代数の基礎

寺田文行・木村宣昭共著／A5判・176頁・本体1480円
左ページに解説，右ページにそれに関連した図や小問を配置するように配慮した．高校数学とのつながりにも配慮しわかりやすく解説．2色刷．

## 基礎課程線形代数

吉野雄二著／A5判・240頁・本体1700円
著者の講義経験が生かされ，授業の不足点を補うことができるよう構成された好個の教科・参考書となっている．

## 理工系 線形代数

水田義弘著／A5判・216頁・本体1600円
自然科学等で広く利用されている応用例も加え，数学的なものの見方を身につけることに重点をおいたテキスト．2色刷．

## 線形代数 増訂版

寺田文行著／A5判・200頁・本体1262円
好評の前著「線形代数」をもとに，使い易さを中心に考え，内容を入れ替え，問題を難易別に配列した．

## 線形代数の基礎と応用

荒木不二洋著／A5判・240頁・本体1550円
高校の数学・物理にスムーズに接続するように配慮された理工系大学初年級・高専向のテキスト．例・例題は適切で分り易いものが選ばれている．

## 概説 線形代数

宮脇伊佐夫著 A5判・152頁・本体1500円
きっちり整理して書かれており，本文中には例題，章末には問題を多数配置しているので，しっかりとした知識を身につけることができる．2色刷．

## 線形代数概説

平峰豊著／A5判・144頁・本体1480円
数学の基礎の一つである線形代数の各項目をわかりやすい例を豊富に用いながら，順序よく平易に解説をする．

表示価格はすべて税抜きです

**サイエンス社**

# 数学テキスト好評書より(2)

数理系のための
## 基礎と応用 微分積分I
金子晃著／A5判・256頁・本体1800円
レポートやプログラム例の他に，期末試験の問題と解答・講評などをできるだけ盛り込み，親しみやすくまとめられている．

## 基礎課程 微分積分I，II
西山享著／A5判 I：208頁・本体1380円
II：136頁・本体1280円
第I巻では1変数の微積分，第II巻では多変数の微積分と微分方程式を扱っている．2色刷．

## 改訂 微分積分
洲之内治男・和田淳蔵共著／A5判・232頁・本体1280円
高校における数学教育を考慮し，例題等を厳選し，直観的理解を重視した改訂版．前著同様に1年間の講義用テキストとして章だてされている．

## 微分積分の基礎と応用
江沢洋著／A5判・272頁・本体1800円
高校における数学・物理学の履修進度を考慮した理工系大学初年級向のテキスト．読者の考える力が養われるように配慮されたユニークな書．

## 概説 微分積分
加藤久子著／A5判・256頁・本体1850円
本書は，理工系大学初学年の学生が微分積分をゆっくりしたペースで読み進め，的確に理解することを目標とした．基礎的事項や例題を精選し，やさしく解説した好個の教科・参考書．2色刷．

## 入門微分積分
水田義弘著／A5判・200頁・本体1700円
高校数学とのつながりに配慮し，証明の基本的なアイデアを読みとれるよう工夫．微分方程式や偏微分方程式についても解説．2色刷．

## 微分積分概論
越昭三監修／高橋・加藤共著／A5判・224頁・本体1700円
豊富な例題や章末問題等は，実力の涵養に最適．偏微分法や重積分法まで十分にカバーした理工系の学生にとって格好の教科・参考書．

## 微分積分学
笠原晧司著／A5判・340頁・本体1845円
最新の解析学の流れを考慮しつつ，理論構成において厳密に，叙述において平明に，感覚においてモダンに著わされた本格的テキスト．

## 微分積分の基礎
寺田・中村共著／A5判・208頁・本体1480円
高等学校の「数学II」までの知識で学ぶことができる．例や図を多用したわかりやすい解説．見開き体裁・2色刷．

## 微分積分概説
長瀬・芦野共著／A5判・256頁・本体1750円
まず概説的な形で微分積分の基本的な事柄を述べ，その後あらためて数学的に厳密に考えてみるよう章の配置を考慮した．2色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

# 数学テキスト好評書より（3）

## 微分方程式とその応用
竹之内脩著／A5判・256頁・本体1480円
理工系の学生・技術者を対象に微分方程式の物理学・工学への応用や，そのために不可欠なラプラス変換と演算子法についても詳しく解説してある．

## 新版 微分方程式入門
古屋茂著／A5判・248頁・本体1400円
長年，微分方程式の平易な入門書として親しまれてきた前著の新版．応用面との関連を重視し，今回付章として新たに「ラプラス変換」を加えた．

## 微分方程式の基礎と応用
佐藤光著／A5判・248頁・本体1600円
広い読者層を想定し，微積の初歩から説き起こし，常微分方程式の定型的な解法を説明．関連した数学の基礎分野の理解が進むよう配慮されている．

## 概説 微分方程式
中尾愼宏著／A5判・168頁・本体1600円
微分方程式の面白さと有効性が伝わるように，広く大学理工系学生を対象に書かれた入門書．具体的な方程式やその解法に重点をおいて解説．

## 微分方程式の基礎
寺田文行著／A5判・112頁・本体1200円
高校の新課程と学習の実態に配慮した微分方程式の入門書．具体例を多く用いて解説．完全見開き形式で見やすいことも特徴となっている．

## 改訂 関数論
洲之内治男・猪股清二共著／A5判・168頁・本体1340円
好評テキスト「関数論」の改訂版．旧版の特色を保持しつつ書き改めることにより，一層の明解さをはかった．豊富な例題・演習問題が理解を助ける．

## 基礎課程 複素関数論
占部博信著／A5判・200頁・本体1600円
予備知識は少なく，多くの具体例を通して，をモットーにし，理論と応用を簡潔かつ丁寧に解説した理工系向けの教科・参考書．

## 複素関数の基礎
寺田文行著／A5判・168頁・本体1600円
左頁に解説，右頁に図やポイント，小問を配置する見開き形式で，関数論の基礎から応用まで1つ1つステップアップできる懇切丁寧なテキスト．

## 複素関数概説
今吉洋一著／A5判・208頁・本体1600円
複素関数を複素変数のままで取り扱えるよう天下り的な議論を避け，理論の意味や発想，考え方が直観的に分かるよう説明．

## ベクトル解析とその応用
竹之内脩著／A5判・160頁・本体1480円
大学2年生程度の学生を対象に，豊富な図や例を中心にベクトル解析をていねいに解説する．工科系の学生にも理解しやすいように配慮されている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

# 工学テキストより

## 機構学
森田鈞著／A5判・160頁・本体1600円
機械は，抵抗力のある物体の組合せであり，その各部が行う限定された相対運動について学ぶのが機構学である．多数の図面を用いて丁寧に解説．

## 工学基礎 図学と製図［改訂版］
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5判・約230頁・予価1700円
広く講義で使われてきた「工学基礎図学と製図」の改訂版．AutoCADの利用も配慮し，さらに2色刷とするなどより現代的に改訂した．

## 機械製図
福永・喜山・石川・神宮共著／A5判・288頁・本体1942円
機械製図の基本的事項を取り上げ，JIS規格表に基づいて解説した格好のテキストである．多数の図表を用いてわかりやすくていねいに解説した．

## 工学基礎 波動論
徳岡辰雄著／A5判・224頁・本体2300円
工学で扱うさまざまな波動現象を総合的に解説したテキスト．形式的記述や論理的飛躍を極力避け，波動現象の様相を一歩ずつ着実に展開した．

## 機械工学のための 振動・音響学
鈴木・西田・丸山・渡辺共著／A5判・256頁・本体2300円
大学の機械工学系の3～4年生，工業高専の最上級生を対象とし，振動学・音響工学の基礎をしっかりと習熟できることに主眼をおいたテキスト．

## 演習機械振動学
佐藤・岡部・岩田共著／A5判・200頁・本体1800円
機械力学，特に振動を中心としたダイナミックスについての基礎学力をつけるための演習書．質点及び剛体の力学の基礎からはじめている．

## 機械力学入門
辻岡康著／A5判・192頁・本体1600円
機械力学とは機械に関する動力学の問題を扱う学問である．この入門書では，線形系の振動から始め，回転機械・往復機械の動力学までを解説する．

## 演習 機械力学
辻岡康著／A5判・128頁・本体1456円
テキスト「機械力学入門」と対になる演習書である．力学系の振動論を中心に，著者の永年の講義経験を活かして，基本的かつ具体的な例題を厳選した．

## 演習 機械運動学
高野政晴・遠山茂樹共著／A5判・248頁・本体2524円
ロボットの機構など，時代の要請にも即した新鮮な内容をもり込み，豊富な図で解説した演習書．要項・例題を頁単位で配し，学習の便宜をはかる．

## 演習 材料力学
尾田十八・三好俊郎共著／A5判・224頁・本体1845円
あらゆる工学の基礎をなす材料力学の基礎理論を完全に修得し，かつ実際的な問題への応用能力を十分に身に付けるように配慮して書かれている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

# コンピュータ関連テキスト(1)

Windows 版
## コンピュータリテラシ [基礎編]

植松康祐編著/韓・下條・岡本・安達共著/B5判・96頁・本体1200円
Word, Excel, NetscapeNavigator, Eudora Proを主に用いながら，文字の入力，ファイルの扱い，文書作成，電子メールを中心とするインターネットの利用，表計算までを学ぶ．

## 情報処理システム入門 [第2版]

浦昭二・市川照久共編/A5判・312頁・本体1800円
長年にわたり好評を博してきた前著の待望の第2版．初めてコンピュータを学ぶ人や，自身のこれまでの知識を再整理しようとする人に最適．

コンピュータサイエンスのための
## 離散数学

守屋悦朗著/A5判・240頁・本体2400円
理論的コンピュータサイエンスの各分野で必要な斯学の中から特に基礎的事項を取り上げる．

## 計算機科学入門

M. A.アービブ・A. J.クフォーリ・R. N.モル共著
甘利・金谷・嶋田共訳/A5判・248頁・本体2524円
オートマトンの理論，PascalとLispの入門書，論理回路，ブール代数などをわかりやすく解説した．

## オートマトン 言語理論 計算論

J. E.ホップクロフト・J. D.ウルマン共著/
野崎昭弘・高橋正子・町田元・山崎秀記共訳/
A5判・I巻：320頁，II巻：296頁・本体各2816円
入門書として高い評価を得ている書の邦訳．

## 計算論とオートマトン理論

A.サローマ著/野崎昭弘・町田元・山崎秀記・横森貴共訳/A5判・352頁・本体3204円
古典的計算可能性理論，形式言語とオートマトンの理論，計算量の理論，暗号学等について解説．

## アルゴリズムの設計と解析

A. V.エイホ・J. E.ホップクロフト・J. D.ウルマン共著/
野崎昭弘・野下浩平共訳/
A5判・I巻：240頁，II巻：244頁・本体各2816円
著名な著者陣が斯学の最近の成果を集成した書．

## アルゴリズムとプログラミング技法

野崎昭弘著/A5判・176頁・本体1350円
能率の高く応用の広いプログラム技法や改良法を解説．PASCALのプログラムを掲載．サポートページよりCのプログラムをダウンロードできる．

## コンピュータの構成と設計

F. J.ヒル・G. R.ピーターソン共著/当麻喜弘ほか共訳
A5判・I巻：304頁，II巻：320頁・本体各2800円
コンピュータを全体的システムとして理解できるよう配慮したユニークなハードウェア入門書．

## コンピュータ解体新書

清水忠昭・菅田一博著/A5判・216頁・本体1500円
難しいと敬遠されがちなコンピュータの仕組を，やさしく，わかりやすく説明．特に図版を多用して，直観的な把握ができるように配慮した．

表示価格はすべて税抜きです

**サイエンス社**

# コンピュータ関連テキスト(2)

## ハードウェア入門

柴山潔著／A5判・160頁・本体1400円
現代のコンピュータシステムの主要なハードウェア機構を構成するプロセッサ，メインメモリ，及び周辺装置の各機能やそれらの分担方式について明らかにする．

## 改訂 FORTRAN77

大駒誠一著／A5判・280頁・本体1700円
例題ごとにいくつかのプログラムを提示し解説を施すというスタイルで，短期間に一定のレベルに達したいという初学者に最適．好評書の改訂版．

## ザ・FORTRAN77

戸川隼人著／A5判・152頁・本体1408円
計算機科学の教育に経験豊かな著者が，すぐに使えるFORTRANのプログラミングの方法を解説．わかりやすさを重視して書かれている．2色刷．

## Fortran 77 プログラミング

原田賢一著／A5判・324頁・本体1650円
実践的な例題を豊富に使用して，アルゴリズムやや計算手順など考え方を丁寧に説明．流れ図やプログラム，重要なポイントは2色刷の見やすい構成．

## ザ・Fortran90/95

戸川隼人著／A5判・216頁・本体1750円
数値計算に適した言語として広く使われているFortranの最新仕様に即した入門書．本書では新しい要素を十分に活かし，入門者ができるだけ短時間で理解できるように書かれている．2色刷．

## 演習と応用 FORTRAN 77

戸川隼人著／A5判・248頁・本体1806円
実際に書いて「体で覚える」ように応用に重点をおいた演習書．例題を通して数値計算・統計解析・事務処理などの概要を理解することができる．

## COBOLの基礎と応用

**JIS 1992年版準拠**

大駒誠一著／A5判・216頁・本体1450円
初心者がCOBOLのプログラムを書けるようになることを目標に，実践に即し整理された入門書．

## ザ・PASCAL

戸川隼人著／A5判・196頁・本体1700円
プログラミング言語教育にとって最近とみにその重要性が指摘されるPascalの要所をあます所なく解説する．例題は有限要素法まで扱う．2色刷．

## Pascal プログラミングの基礎

真野芳久著／A5判・280頁・本体1900円
プログラミングの初心者を対象に，例題を通した説明を行った．誤りないプログラミングのための知識，手法，プログラムの構成法なども紹介．

## Pascal 入門

古郡廷治著／A5判・240頁・本体2300円
人文系・理工系という垣根を取り払って，幅広い分野の読者層を対象とし，わかりやすくPascalプログラミングの「作法」を伝えた入門書．

表示価格はすべて税抜きです

**サイエンス社**